МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок, создаваемых на основе требований нового учебного плана – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Напомним коротко основные определения и теоремы.

Определение. Задана ***последовательность (числовая последовательность),*** если задана ***функция f на множестве натуральных чисел:***

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}: \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{a_n} \in \mathbb{R}.$$

Определение. $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n} + \cdots$ – ***числовой ряд.***

Определение. $\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n}$ – ***n-я частичная сумма*** (конечная сумма при любом n).

Определение. ***Суммой ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, если существует такой конечный предел (тогда говорят, что ряд сходится). Если предел бесконечный или не существует, то говорят, что ряд расходится.

Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n > N(\varepsilon) \ \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n > N(\varepsilon) \ \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Следствие (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Обратное утверждение не является верным: из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Следствие. Пусть заданы два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \ \ a_n = b_n$, то ряды сходятся и расходятся одновременно (то есть любое конечное число членов ряда не влияет на его сходимость).

Утверждение. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то для любого k сходится остаток ряда $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Обратно, если хотя бы для одного значения k сходится остаток ряда $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, то сходится и сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие. Утверждение означает, что либо все остатки ряда сходятся, либо все они расходятся.

Теорема. Пусть сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и их суммы равны S и T, соответственно. Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ и его сумма равна $S + T$. Кроме того, для любого числа c ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$сходится и его сумма равна cS.

Следствие. Пусть заданы два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \;\; a_n = kb_n,\; k \neq 0$, то ряды сходятся и расходятся одновременно.

Вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно рассмотреть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. При этом

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся***;
2) если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***.

Замечание. Для рядов в общем случае не выполняется коммутативность и ассоциативность, то есть нельзя слагаемые менять местами и расставлять или убирать скобки (это не относится к частичным суммам, которые являются конечными суммами!).

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Попробуем расставить скобки и поменять слагаемые местами несколькими способами.

1) $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0.$
2) $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1.$
3) Поменяем местами 2-е и 3-е слагаемые, затем 3-е и 4-е и так далее, получим ряд
   $1 + 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 2.$
4) Перепишем ряд в другом виде и снова поменяем часть слагаемых местами:
   $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots =$
   $= 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \ldots =$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ \dots =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) \dots = \tfrac{3}{2}\,.$$

Таким образом, представляя члены ряда в виде сумм различных чисел, меняя слагаемые местами, убирая и расставляя нужным образом скобки, мы в качестве суммы ряда получим любое наперед заданное число.

Задача 1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Рассмотрим $\forall n \in \mathbb{N}$ n-ю частичную сумму

$$S_n = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)}\,.$$

Поэтому $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1.$

Задача 2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n,\ \ 0 \neq |q| < 1.$

Рассмотрим $\forall n \in \mathbb{N}$ n-ю частичную сумму

$S_n = 1 \cdot q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \dots + n \cdot q^n.$

Тогда

$q \cdot S_n = 1 \cdot q^2 + 2 \cdot q^3 + 3 \cdot q^4 + \dots + n \cdot q^{n+1}$

и, следовательно,

$S_n - q \cdot S_n = (1-q)S_n =$

$= 1 \cdot q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \dots + n \cdot q^n - 1 \cdot q^2 - 2 \cdot q^3 - 3 \cdot q^4 - \dots - n \cdot q^{n+1} =$

$= q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - n \cdot q^{n+1} = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} - n \cdot q^{n+1}.$

Поэтому $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{q}{(1-q)^2}\,.$

То, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nq^{n+1}}{1-q}=0$ легко доказать, использовав, например, правило Лопиталя для функции $f(x)=\frac{xq^{x+1}}{1-q}$ при $0\neq|q|<1$.

Задача 3. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n+3}$ расходится.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\frac{n+1}{n+3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=1\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)$ не существует, и ряд расходится.

Задача 4. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ расходится.

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}\right)=0$, то есть необходимое условие сходимости ряда выполнено. Но $\forall n\in\mathbb{N}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}}$, где $a_k=\frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}\quad\forall k\leq n\Longrightarrow$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$. Следовательно, ряд расходится.

1.2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Мы будем рассматривать ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n\geq 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

Признаки сравнения.

1) Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Пусть дополнительно выполнено, что $a_n\leq b_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$. Тогда,
   если $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится;
   если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ тоже расходится.

2) Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть дополнительно выполнено, что $a_n, b_n > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема ***(признак сходимости Коши).*** Пусть $0 < q < 1$. Если существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если же существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Часто ***признак Коши*** формулируют ***в предельной форме:***

Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится. Если $q > 1$, то ряд расходится. При $q = 1$ признак ответа не дает.

Теорема ***(признак сходимости Даламбера).*** Если существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняются неравенства $0 < a_{n+1} < q a_n$, где $0 < q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняются неравенства $a_{n+1} \geq a_n > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

В предельной форме признак Даламбера выглядит так:

Пусть существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $a_n > 0$ и пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится. Если $q > 1$, то ряд расходится. При $q = 1$ признак ответа не дает.

Теорема ***(интегральный признак сходимости Коши-Маклорена).*** Пусть задан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и значения функция $f(x)$, заданной при всех $x \geq 1$, совпадают с a_n при $x = n$. Если при этом функция $f(x)$

1) непрерывна при $x \geq 1$,
2) неотрицательна при $x \geq 1$,
3) монотонно убывает при всех $x \geq x_0 \geq 1$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Следствие. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Задача 5. Применив признаки сравнения и использовав последнее следствие, докажите сходимость или расходимость рядов

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5}$

Задача 6. С помощью признака Даламбера докажите, что ряд

$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ сходится.

В этом случае $a_n = \frac{2n}{3^n}$, $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$, поэтому

$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{2n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1$ и значит ряд сходится.

Задача 7. С помощью признака Даламбера докажите, что ряд

$1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}$ сходится.

В этом случае $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1}}{(n+1)!} = \frac{2^n}{(n+1)!}$, поэтому

$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{(n+1)!}}{\frac{2^{n-1}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n!}{2^{n-1}\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{n+1}\right) = 0 < 1$ и значит ряд сходится.

Замечание. Напомним, что для $\forall n \in \mathbb{N}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n$

$0! = 1$

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$

$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

Задача 8. С помощью признака Даламбера докажите, что ряд

$1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$ сходится.

В этом случае $a_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1)-1)!!} = \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}$, поэтому

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}}{\frac{n!}{(2n-1)!!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot(2n-1)!!}{(2n+1)!!\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!(n+1)\cdot(2n-1)!!}{(2n-1)!!(2n+1)\cdot n!}\right) =$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ и значит ряд сходится.

Задача 9. С помощью признака Даламбера докажите, что ряд

$1 + \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{3^2}{2^2\cdot 5} + \frac{3^3}{2^3\cdot 7}\ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}$ расходится.

В этом случае $a_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}$, $a_{n+1} = \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$, поэтому

$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{2^n(2n+1)}}{\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot 2^{n-1}\cdot(2n-1)}{3^{n-1}\cdot 2^n\cdot(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot(2n-1)}{2\cdot(2n+1)} = \frac{3}{2} > 1$ и значит ряд расходится.

Задача 10. С помощью признака Коши докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$ сходится.

В этом случае

$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ и значит ряд сходится.

Задача 11. С помощью признака Коши докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n^2-5}$ сходится.

В этом случае

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n^2-5}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3n}{3n+1} - 1\right)^{\frac{n^2-5}{n}} =$$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{3n+1}\right)^{\frac{n^2-5}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{-1}{3n+1}\right)^{\frac{3n+1}{-1}}\right)^{\frac{-1}{3n+1}\cdot\frac{n^2-5}{n}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} < 1$ и значит ряд сходится.

Задача 12. С помощью признака Коши докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2-3n}$ расходится.

В этом случае

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2-3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n^2-3n}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{1}}\right)^{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-3}{1}}=e^1=e>1$$ и значит ряд расходится.

Задача 13. С помощью признака Коши докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n^2-4n+7}$ расходится.

В этом случае

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n^2-4n+7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{\frac{n^2-4n+7}{n}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{\frac{n^2-4n+7}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{1}}\right)^{\frac{1}{n+3}\cdot\frac{n^2-4n+7}{n}}=\frac{1}{2}e^1=\frac{e}{2}>1$$ и значит ряд расходится.

Задача 14. С помощью признака Коши докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{\frac{n^3-2n+13}{n+2}}$ сходится.

В этом случае

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{\frac{n^3-2n+13}{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{\frac{n^3-2n+13}{n(n+2)}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{\frac{n^3-2n+13}{n(n+2)}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{\frac{n+5}{1}}\right)^{\frac{1}{n+5}\cdot\frac{n^3-2n+13}{n(n+2)}}=\frac{1}{3}e^1=\frac{e}{3}<1$$ и значит ряд сходится.

Замечание. Напомним, что если $a>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{a}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln a^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln a}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln a}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a}{n}}=$$
$$=e^0=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=$$
$$=e^0=1.$$

Задача 15. С помощью признака Коши докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n+3}$ сходится.

В этом случае

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{\frac{2n+3}{n}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\sqrt[n]{n}}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{\frac{2n+3}{n}}\right)=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}<1 \text{ и значит ряд сходится.}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\sqrt[n]{n}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\sqrt{1}=1.$

Задача 16. С помощью интегрального признака докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ расходится.

В этом случае $a_n=\frac{1}{2n-1}=f(n)$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ при $x\geq 1$.

Для этой функции выполняются условия:

1) $f(x)=\frac{1}{2x-1}>0$ при $x\geq 1$,

2) $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ непрерывна при $x\geq 1$,

3) $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ монотонно убывает при $x\geq 1$.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{2x-1}d(2x-1)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln|2x-1|\,\Big|_1^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln|2b-1|-\ln 1)=\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится, а значит и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ тоже расходится.

Задача 17. С помощью интегрального признака установите сходимость или расходимость следующих рядов: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

В этом случае для всех соответствующих функций $f(x)$ очевидно выполняются условия:

1) $f(x) > 0$ при $x \geq 1$,

2) $f(x)$ непрерывна при $x \geq 1$,

3) $f(x)$ монотонно убывает при $x \geq 1$.

Рассмотрим несобственные интегралы.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\ln|x|\,\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln|b| - \ln 1) = \infty.$$

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, а значит, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ тоже расходится.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\lim_{b\to\infty}\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b} - \sqrt{1}\right) = \infty.$$

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, а значит, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ тоже расходится.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а значит, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ тоже сходится.

Эта задача должна помочь понять и запомнить утверждение о том, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Задача 18. С помощью интегрального признака докажите, что ряд $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.

В этом случае $a_n = \frac{1}{n\ln n} = f(n)$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ при $x \geq 10$.

Для этой функции выполняются условия:

1) $f(x) = \frac{1}{x\ln x} > 0$ при $x \geq 10$,

2) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ непрерывна при $x \geq 10$,

3) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ монотонно убывает при $x \geq 10$ (например, потому, что производная отрицательна при всех $x \geq 10$).

Или другое объяснение: x и $\ln x$ положительны, непрерывны и возрастают при $x \geq 10$, значит, их произведение также положительно, непрерывно и возрастает, а значит, $\frac{1}{x\ln x}$ принимает положительные значения и убывает при $x \geq 10$, а также непрерывна, так как $x\ln x \neq 0$ при $x \geq 10$.

Замечание. В дальнейшем доказательства условий 1–3 проводите самостоятельно.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_{10}^{+\infty} f(x)dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{10}^{b} \frac{1}{\ln x} d\ln x = \lim_{b\to\infty} \ln|\ln x| \Big|_{10}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln|\ln b| - \ln|\ln 10|) = \infty.$$

Следовательно, интеграл $\int_{10}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, а значит, и ряд $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ тоже расходится.

Задача 19. С помощью интегрального признака докажите, что ряд $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ сходится.

В этом случае $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n} = f(n)$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ при $x \geq 10$.

Для этой функции выполняются условия:

1) $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x} > 0$ при $x \geq 10$,

2) $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ непрерывна при $x \geq 10$,

3) $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ монотонно убывает при $x \geq 10$.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_{10}^{+\infty} f(x)dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_{10}^{b} \frac{1}{\ln^2 x} d\ln x = -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln x}\Big|_{10}^{b} =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln b} - \frac{1}{\ln 10}\right) = -0 + \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}.$$

Следовательно, интеграл $\int_{10}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а значит и ряд $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ тоже сходится.

Задача 20. Использовав признаки сравнения, докажите, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ расходится.

В этом случае $a_n = \sin\frac{\pi}{n} > 0$ при $n \geq 2$.

Рассмотрим вместе с этим рядом ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi}{n} = \pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится по интегральному признаку, так как $p = 1$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 = k > 0$.

Следовательно, и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ тоже расходится.

Задача 21. Использовав признаки сравнения, докажите, что ряд $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 \operatorname{tg}^6 \frac{\pi}{n}$ сходится.

В этом случае $a_n = n^2 \operatorname{tg}^6 \frac{\pi}{n} > 0$ при $n \geq 3$.

Рассмотрим вместе с этим рядом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, который сходится по интегральному признаку, так как $p = 4 > 1$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 \operatorname{tg}^6\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^6 \operatorname{tg}^6 \frac{\pi}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^6\left(\frac{\pi}{n}\right)^6\right) =$

$= \pi^6 = k > 0$.

Следовательно, и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 \operatorname{tg}^6 \frac{\pi}{n}$ тоже сходится.

Задача 22. Использовав признаки сравнения, докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$ сходится.

В этом случае $a_n = \sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2} > 0$ при $n \geq 1$.

Рассмотрим вместе с этим рядом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, который сходится по интегральному признаку, так как $p = \frac{4}{3} > 1$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot \frac{1}{n^2}\right) =$

$= 1 = k > 0$.

Следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$ тоже сходится.

Задача 23. Использовав признаки сравнения, докажите, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ сходится.

В этом случае $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > 0$ при $n \geq 1$.

Рассмотрим вместе с этим рядом ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится по интегральному признаку, так как $p = 2 > 1$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right) = 1 = k > 0$.

Следовательно, и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ тоже сходится.

Задача 24. Использовав признаки сравнения, докажите, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$ сходится.

В этом случае $a_n = \ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right) < 0$ при $n \geq 2$. Но тогда в ряде $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)\right)$ все члены ряда будут положительными, и, как уже было сформулировано выше, эти ряды будут сходиться или расходиться одновременно.

Рассмотрим вместе с этими рядами ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится по интегральному признаку, так как $p = 3 > 1$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)}{\frac{1}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-\ln\left(1+\frac{-2}{n^3+1}\right)}{\frac{1}{n^3}}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-\left(\frac{-2}{n^3+1}\right)}{\frac{1}{n^3}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3\cdot\frac{2}{n^3+1}\right)=2=k>0.$

Следовательно, и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$ тоже сходится.

Задача 25. Использовав признаки сравнения, докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{n}+3}{n^2}$ сходится.

В этом случае $a_n=\frac{\cos\sqrt{n}+3}{n^2}>0$ при $n\geq 1$.

Заметим, что при любом $n\geq 1$ выполняется неравенство $0<\frac{\cos\sqrt{n}+3}{n^2}<\frac{4}{n^2}$.

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$ сходится по интегральному признаку.

Следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{n}+3}{n^2}$ тоже сходится.

1.3. Достаточные признаки сходимости знакопеременных рядов

Теорема *(признак Дирихле).* Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, причем,

1) $\exists C>0$, такое, что $\forall n\in\mathbb{N}\quad A_n=|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leq C$
2) $b_n\to 0$ монотонно.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

Следствие *(признак Лейбница).* Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, причем, $b_n\to 0$ монотонно.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ сходится.

Теорема *(признак Абеля).* Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, причем,

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится
2) $\{b_n\}$ монотонно убывает и имеет конечный предел b (монотонно убывает и ограничена снизу).

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^a}$, где x фиксирован, $a>0$. Докажем, что ряд сходится по признаку Дирихле.

Заметим, что при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ряд сходится, так как все члены ряда равны 0.

Рассмотрим ряд при $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Запишем члены ряда в виде $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \frac{1}{n^a}$ и положим в этом случае $a_n = \sin nx$ и $b_n = \frac{1}{n^a}$.

Заметим, что $b_n = \frac{1}{n^a} \to 0$ монотонно.

Докажем, что все частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ограничены числом, не зависящим от n.

$A_n = |\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx| \boxed{=}$

так как $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Запишем выражение для A_n в виде дроби и умножим ее числитель и знаменатель на $\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$, получим:

$$\boxed{=} \frac{\left|2\sin x \sin\frac{x}{2} + 2\sin 2x \sin\frac{x}{2} + \cdots + 2\sin nx \sin\frac{x}{2}\right|}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} =$$

$$= \frac{\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cdots + \cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right|}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} =$$

$$= \frac{\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right|}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{2}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \text{ – не зависит от } n.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$, где x фиксирован, $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ сходится по признаку Дирихле.

Задача 26. Докажите, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^a}$, где x фиксирован, $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}, a > 0$.

В частности, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ (при $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Но можно доказать, что эти ряды сходятся условно.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ и докажем, что он расходится.

Так как $0 \leq \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n}$, то рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos 2nx}{2n} \underbrace{=}_{\substack{\text{конечная}\\ \text{сумма!}}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}_{\substack{\to\infty \text{ при } N\to\infty,\\ \text{так как ряд}\\ \text{расходится}}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2nx}{n}}_{\substack{\to S \text{ при } N\to\infty,\\ \text{так как ряд}\\ \text{сходится}}} \to \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ расходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится условно.

Задача 27. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ сходится условно при $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.