МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ЧАСТЬ 1

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры нахождения области сходимости и области абсолютной сходимости функциональных рядов, радиуса сходимости степенных рядов и исследования их сходимости в граничных точках области. Рассмотрены примеры равномерной сходимости рядов.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Напомним коротко основные определения и теоремы.

Определение. Задана ***функциональная последовательность,*** если задано отображение

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}: \quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \boldsymbol{f_n(x)}, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}.$$

Определение. $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots}$ – ***функциональный ряд*** *(в дальнейшем – просто ряд).*

Определение. $\boldsymbol{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)}$ – ***n-я частичная сумма*** (конечная сумма при любом n).

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в точке $x_0 \in X$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в каждой точке $x \in X$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***сходится поточечно*** на множестве X к функции $f(x)$, то есть

$\forall \varepsilon > 0\ \ \forall x \in X\ \ \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N(\varepsilon, x)\ \ |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$

1. Сходимость функциональных рядов

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$.

Решение.

Использовав знания о сходимости числовых рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, получим, что

при $3x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{2}{3}$ ряд расходится;

при $0 < 3x - 2 \le 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \le 1$ ряд сходится условно;

при $3x - 2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$ ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$.

Решение.

Использовав знания о сходимости числовых рядов, получим, что при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ряд сходится абсолютно, так как $\sin \pi k = 0$.

при $x > 0$ ряд сходится абсолютно.

при $x < 0,\ x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ряд расходится.

В дальнейшем нас будет интересовать главным образом **абсолютная сходимость функциональных рядов**, то есть наряду с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ мы будем рассматривать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ и исследовать его сходимость. Это означает, что при каждом значении x надо провести следующее исследование.

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \begin{cases} < 1 - \text{ряд сходится} \\ > 1 - \text{ряд расходится} \\ = 1 - \text{сходимость с помощью этого} \\ \qquad\qquad \text{признака не определяется,} \end{cases}$$

или

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \begin{cases} < 1 - \text{ряд сходится} \\ > 1 - \text{ряд расходится} \\ = 1 - \text{сходимость с помощью этого} \\ \qquad\qquad \text{признака не определяется.} \end{cases}$$

Задача 1. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{3x+2}\right)^n$ и исследовать его сходимость в граничных точках области.

Решение.

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{x-3}{3x+2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x-3}{3x+2}\right| = \left|\frac{x-3}{3x+2}\right|.$$

Решим неравенство $q(x) < 1$.

$$\left|\frac{x-3}{3x+2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-3}{3x+2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{3x+2} < 1 \\ \frac{x-3}{3x+2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+5}{3x+2} < 0 \\ \frac{4x-1}{3x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Следовательно, $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ – область абсолютной сходимости этого функционального ряда. Рассмотрим граничные точки этой области.

$x = -\frac{5}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\frac{5}{2}-3}{-3\cdot\frac{5}{2}+2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-5-6}{-15+4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1)^n$ – ряд расходится, так как члены ряда не стремятся к нулю.

$x = \frac{1}{4}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{4}-3}{3\cdot\frac{1}{4}+2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-12}{3+8}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ – ряд расходится, так как члены ряда не стремятся к нулю.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ – область абсолютной сходимости;

при $x = -\frac{5}{2}$ и $x = \frac{1}{4}$ ряд расходится.

Задача 2. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n}{n}$ и исследовать его сходимость в граничных точках области.

Решение.

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(\ln x)^n}{n}\right|} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(\ln x)^n|}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = |\ln x|.$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n = a} = 1$ при $a > 0$.

Решим неравенство $q(x) < 1$.

$|\ln x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e^1$.

Следовательно, $x \in (e^{-1}; e)$ – интервал абсолютной сходимости этого функционального ряда. Рассмотрим граничные точки этой области.

$x = e$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln e)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – ряд расходится (гармонический).

$x = e^{-1}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln e^{-1})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – ряд сходится условно (по признаку Лейбница.

Ответ: $x \in (e^{-1}; e)$ – область абсолютной сходимости;

при $x = e$ ряд расходится; при $x = e^{-1}$ ряд сходится условно.

Задача 3. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{5n+2}$ и исследовать его сходимость в граничных точках области.

Решение.

Замечание. Если $q(x)$ вычисляется по правилу $q(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|$, то хорошо бы сначала отдельно рассмотреть случай $f_n(x) = 0$ (чтобы не делить на 0). В нашем случае $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Но при $x = 0$ все члены ряда равны нулю, и ряд сходится абсолютно. Заметим, что, посчитав область абсолютной сходимости, мы $x = 0$ не потеряем. Аналогично и в других случаях.

В этой задаче $f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{5n+2}$, поэтому $f_{n+1}(x) = \frac{x^{2(n+1)+1}}{5(n+1)+2} = \frac{x^{2n+3}}{5n+7}$, поэтому

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}\cdot(5n+2)}{(5n+7)\cdot x^{2n+1}}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(5n+2)}{(5n+7)}\right| = x^2.$$

Решим неравенство $q(x) < 1$.

$x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$

Следовательно, $x \in (-1; 1)$ – интервал абсолютной сходимости этого функционального ряда. Рассмотрим граничные точки этой области.

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – ряд расходится (эквивалентен гармоническому).

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{5n+2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$ – ряд расходится (эквивалентен гармоническому).

Ответ: $x \in (-1; 1)$ – область абсолютной сходимости;

при $x = -1$ ряд расходится; при $x = 1$ ряд расходится.

Задача 4. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)^n$ и исследовать его сходимость в граничных точках области.

Решение.

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|\right) = 1\cdot\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right| = \left|\frac{3x-1}{2x+1}\right|.$$

Решим неравенство $q(x) < 1$.

$$\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x-1}{2x+1} < 1\\ \frac{3x-1}{2x+1} > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-2}{3x+2} < 0\\ \frac{5x}{3x+2} > 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (0; 2).$

Следовательно, $x \in (0; 2)$ – область абсолютной сходимости этого функционального ряда. Рассмотрим граничные точки этой области.

$x = 0 :\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ – ряд сходится условно (по признаку Лейбница).

$x = 2 :\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{6-1}{4+1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – ряд расходится (гармонический).

Ответ: $x \in (0; 2)$ – область абсолютной сходимости;

при $x = 0$ ряд сходится условно; при $x = 2$ ряд расходится.

Задача 5. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}$ и исследовать его сходимость в граничных точках области.

Решение.

Заметим, что область определения $f_n(x)$ задается условием $x + 2 > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

Решим неравенство $q(x) < 1$.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x + 2 > \frac{1}{9} \Leftrightarrow x > -\frac{17}{9} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{17}{9}; +\infty\right).$$

Следовательно, $x \in \left(-\frac{17}{9}; +\infty\right)$ – область абсолютной сходимости этого функционального ряда. Рассмотрим граничную точку этой области.

$$x = -\frac{17}{9} :\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{\left(-\frac{17}{9}+2\right)^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

– ряд сходится условно (по признаку Лейбница).

Ответ: $x \in \left(-\frac{17}{9}; +\infty\right)$ – область абсолютной сходимости;

при $x = -\frac{17}{9}$ ряд сходится условно.

Пример использования эквивалентностей.

Задача 6. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$ и исследовать его сходимость в граничных точках области.

Решение.

Напомним, что мы рассматриваем поточечную сходимость, то есть сходимость при каждом фиксированном x.

$$q(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(|x|\cdot\sqrt[n]{\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right|}\right)=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right|}\right).$$

Но $\operatorname{tg}\varphi \underbrace{\sim}_{\varphi\to 0} \varphi$, у нас $\frac{x}{2^n}\underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$, поэтому $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right| \underbrace{\sim}_{n\to\infty} \left|\frac{x}{2^n}\right|$. Следовательно, получаем, что

$$q(x)=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left|\frac{x}{2^n}\right|}\right)=\frac{|x|}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|}=\begin{cases}0, & \text{если } x=0\\ \frac{|x|}{2}\cdot 1, & \text{если } x\neq 0\end{cases}=\frac{|x|}{2}.$$

Решим неравенство $q(x)<1$.

$\frac{|x|}{2}<1 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2 \Leftrightarrow x\in(-2;2)$.

Следовательно, $x\in(-2;2)$ – интервал абсолютной сходимости этого функционального ряда. Рассмотрим граничные точки этой области.

При $x=2$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\operatorname{tg}\frac{2}{2^n}$. Так как $\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}}\sim\frac{1}{2^{n-1}}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}}$ знакопостоянный, то его сходимость эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}2$, который расходится, потому что члены ряда не стремятся к нулю; поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\operatorname{tg}\frac{2}{2^n}$ тоже расходится.

При $x=-2$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\operatorname{tg}\frac{2}{(-2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n2^n\operatorname{tg}\frac{2}{2^n}$ (поскольку функция $\operatorname{tg}x$ является нечетной). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n2^n\operatorname{tg}\frac{2}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\operatorname{tg}\frac{2}{2^n}$. Так как $\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}}\sim\frac{1}{2^{n-1}}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}}$ знакопостоянный, то его сходимость эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}2$, который расходится, потому что члены ряда не стремятся к нулю; поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n\cdot\operatorname{tg}\frac{2}{2^n}$ тоже расходится.

Ответ: $x\in\left(-\frac{17}{9};+\infty\right)$ – область абсолютной сходимости;

при $x=\pm 2$ ряд расходится.

Задача 7. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{5^n\cdot\sqrt{n}}$ и исследовать его сходимость в граничных точках области.

Решение.

Заметим, что при $x = 0$ этот ряд сходится абсолютно. Долее будем рассматривать $x \neq 0$.

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{5^n \cdot \sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{x \cdot 5^n \cdot \sqrt{n}}\right|} = x^2 \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[n]{|x|} \cdot 5 \cdot \sqrt[n]{\sqrt{n}}}\right| =$$
$$= \frac{x^2}{5} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[n]{|x|} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{n}}}\right| = \frac{x^2}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{x^2}{5}.$$

Решим неравенство $q(x) < 1$.

$\frac{x^2}{5} < 1 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

Следовательно, $x \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$ – интервал абсолютной сходимости этого функционального ряда. Рассмотрим граничные точки области.

$x = \sqrt{5}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{5^n \cdot \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{5^n \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – ряд сходится условно (так как ряд из модулей расходится) по признаку Лейбница.

$x = -\sqrt{5}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(-\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{5^n \cdot \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{5^n \cdot \sqrt{n} \cdot (-\sqrt{5})} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – ряд сходится условно (так как ряд из модулей расходится) по признаку Лейбница..

Ответ: $x \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$ – область абсолютной сходимости;

при $x = \pm\sqrt{5}$ ряд сходится условно.

Важное замечание. На первом курсе, использовав правило Лопиталя – Бернулли для функций, определенных на $(1; +\infty)$, вы доказали, что $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Отсюда получили, что

$\ln n \ll n \ll e^n \ll n! \ll n^n$,

где символ " $\ll$ " означает «асимптотически», то есть при $n \to \infty$.

Более того, если $\alpha, \beta, \gamma > 0$, то

$(\ln n)^{\alpha} \ll (n)^{\beta} \ll e^{\gamma n} \ll n! \ll n^n$.

Рассмотрим два ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$.

С первым рядом можно «разобраться» легко:

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)}\right| = |x|\cdot 0 = 0.$$

При любом x выполняется неравенство $q(x) < 1$. Следовательно, ряд сходится при любом x.

Со вторым рядом сложнее. Здесь придется применять формулу Стирлинга:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \quad \text{при} \quad n \to \infty:$$

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^2}}{n!}\right|} = q(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^2}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n\cdot e}{n\cdot\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{если } |x| \le 1 \\ \infty, \text{если } |x| \ge 1 \end{cases}.$$

Следовательно, $[-1;1]$ – отрезок абсолютной сходимости. Заметим, что вне этого отрезка ряд расходится (члены ряда не стремятся к нулю).

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ***сходится равномерно*** на множестве X к функции $f(x)$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \forall x \in X \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \; \forall n > N(\varepsilon) \;\; |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши сходимости функционального ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \; \forall n > N(\varepsilon) \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in X \;\; \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon,$

то есть

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \; \forall n > N(\varepsilon) \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in X$$

$$\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

Следствие (необходимое условие равномерной сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, то $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ (то есть равномерно) на множестве X.

Обратное утверждение не является верным: из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ равномерно на множестве X не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Признак Вейерштрасса (равномерной сходимости ряда). Пусть для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \le b_n$, $n = 1,2,3, \ldots$, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на множестве X абсолютно и равномерно.

Интегрирование и дифференцирование рядов

Теорема. Пусть $f_n(x) \in C(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X к своей сумме $S(x)$. Тогда $S(x) \in C(X)$.

Теорема (*о почленном интегрировании ряда*). Пусть $f_n(x) \in C([a;b])$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$ к своей сумме $S(x)$. Тогда $\int_a^x S(t)dt = \int_a^x (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t))dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt,$ $\forall x \in [a;b]$.

Теорема (*о почленном дифференцировании ряда*).

Пусть $f_n(x) \in C^1([a;b])$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на $[a;b]$ к своей сумме $S(x)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно сходится к своей сумме. Тогда $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))'$=$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = (S(x))',$ $\forall x \in [a;b]$.

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится абсолютно и равномерно при всех $x \in [-1;1]$.

Действительно, $\forall x \in [-1;1]$ выполняется

$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x^n|}{|n^2|} \leq \frac{1}{n^2}$.

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (интегральный признак), поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится абсолютно и равномерно при $x \in [-1;1]$.

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$ сходится абсолютно и равномерно при всех $x \in \mathbb{R}$.

Действительно, $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется

$\left|\frac{\cos nx}{3^n}\right| = \frac{|\cos nx|}{|3^n|} \leq \frac{1}{3^n}$.

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии), поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$ сходится абсолютно и равномерно при всех $x \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n^2x\cdot\cos\pi nx}{n\sqrt{n}}$ сходится абсолютно и равномерно при всех $x\in\mathbb{R}$.

Действительно, $\forall x\in\mathbb{R}$ выполняется

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} n^2x\cdot\cos\pi nx}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{|\operatorname{arctg} n^2x\cdot\cos\pi nx|}{|n\sqrt{n}|} = \frac{|\operatorname{arctg} n^2x|\cdot|\cos\pi nx|}{|n\sqrt{n}|} \le \frac{\frac{\pi}{2}\cdot 1}{n\sqrt{n}}.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (интегральный признак), поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n^2x\cdot\cos\pi nx}{n\sqrt{n}}$ сходится абсолютно и равномерно при всех $x\in\mathbb{R}$.

Пример 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1+n^5x^2}$ сходится абсолютно и равномерно при всех $x\in\mathbb{R}$.

Действительно, $\forall x\in\mathbb{R}$ выполняется

$$\left|\frac{2nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{|2nx|}{|1+n^5x^2|} \boxed{\le}$$

воспользуемся следующим очевидным утверждением:

$\forall a,b>0$ выполняется $a^2+b^2\ge 2ab$,

в нашем случае это

$1+n^5x^2\ge 2n^{5/2}|x|$, поэтому

$$\boxed{\le} \frac{|2nx|}{2n^{5/2}|x|} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (интегральный признак), поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1+n^5x^2}$ сходится абсолютно и равномерно при всех $x\in\mathbb{R}$.

2. Радиус сходимости степенного ряда

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. Обычно для упрощения делается замена $z-z_0=x$ и рассматривается ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Если существует конечный и не равный нулю предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, то полагают, что $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то полагают, что $R = \infty$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, то полагают, что $R = 0$.

Степенной ряд, вообще-то говоря, не сходится равномерно на всем интервале сходимости. Но он сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости. Это позволяет сформулировать теорему.

Теорема. Степенной ряд можно интегрировать и дифференцировать почленно на всем интервале сходимости. Радиус сходимости при этом не изменится, но может измениться сходимость в граничных точках интервала.

Задача 1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n+1}x^n$ и исследовать его сходимость в граничных точках.

Решение.

В этом случае $a_n = \frac{n^2+3n+1}{n+1}$ и $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{(n+1)+1} = \frac{n^2+5n+5}{n+2}$.

Поэтому

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n^2+5n+5}{n+2}}{\frac{n^2+3n+1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2+5n+5)(n+1)}{(n+2)(n^2+3n+1)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n+5}{n^2+3n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = 1$$

$\Longrightarrow R = 1 \Longrightarrow (-1;1)$ – интервал абсолютной сходимости.

При $x = 1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n+1}$, который расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{n+1} \neq 0$.

При $x = -1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{n+1}(-1)^n$, который расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{n+1}(-1)^n \neq 0.$$

Ответ: $R = 1$. При $x = \pm 1$ ряд расходится.

Задача 2. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$.

Решение.

В этом случае $a_n = 3^n$.

Поэтому

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{3}$.

Задача 3. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$ и исследовать его сходимость в граничных точках.

Решение.

В этом случае $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$.

Поэтому

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow R = 2.$$

При $x = 2$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n 2^n$, который расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n 2^n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\cdot 2\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^n = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n+2}{2n+3} - 1\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n+2-2n-3}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\left(1 + \frac{-1}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{-1}}\right)}_{\to e}^{\overbrace{\frac{-1}{2n+3}\cdot n}^{\to -\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

При $x = -2$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n 2^n(-1)^n$, который расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n 2^n \neq 0, \text{ а значит и } \lim_{n\to\infty} c_n \neq 0.$$

Ответ: $R = 2$. При $x = \pm 2$ ряд расходится.

Задача 4. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}}(x+2)^n$ и исследовать его сходимость в граничных точках.

Решение.

Обозначим $x + 2 = t$ и получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} t^n$. Исследуем его сходимость.

В этом случае $a_n = \frac{n+1}{4^{n+2}}$ и $a_{n+1} = \frac{n+1+1}{4^{n+1+2}} = \frac{n+2}{4^{n+3}}$.

Поэтому

$$\frac{1}{R_t} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{4^{n+3}}}{\frac{n+1}{4^{n+2}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(4^{n+2})(n+2)}{(n+1)(4^{n+3})}\right| = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow R_t = 4 \Rightarrow (-4; 4)$ − интервал абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} t^n$. Значит, этот ряд абсолютно сходится при

$-4 < t < 4$, когда $-4 < x - 2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 6$.

Следовательно мы получаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}}(x+2)^n$сходится на несимметричном относительно нуля промежутке. Что же тогда мы имеем в виду, когда говорим о радиусе сходимости? Под радиусом сходимости в этом случае (как и в исходном) понимается половина длины интервала сходимости $\left(\text{в нашем случае } R_x = \frac{6-(-2)}{2} = 4\right)$.

Заметим, что проверку сходимости в граничных точках можно проводить для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} t^n$ при $t = \pm 4$ или для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}}(x+2)^n$ при $x = -2$ и $x = 6$. Результат будет один и тот же.

При $t = 4$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} 4^n$, который расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{4^2} = \infty \neq 0$.

При $t = -4$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} 4^n (-1)^n$, который расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4^2} = \infty \neq 0.$$

Ответ: $R = 4$. При $x = \pm 4$ ряд расходится.

Задача 5. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

Решение.

В этом случае $a_n = n^n$.

Поэтому

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$\Rightarrow R = 0$. То есть этот ряд сходится только в одной точке $x = 0$.

Ответ: $R = 0$.

Замечание. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ всегда сходится хотя бы в одной точке ($x = 0$).

Задача 6. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$.

Решение.

В этом случае $a_n = \frac{3^n}{n!}$ и $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$.

Поэтому

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n!}{(n+1)n!} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

$\Rightarrow R = \infty$, то есть ряд сходится абсолютно на всей действительной оси.

Ответ: $R = \infty$.

Задача 7. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} x^n$.

Решение.

В этом случае $a_n = \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2}$.

Поэтому

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n}=[1^{\infty}]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{n+5}-1\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2-n-5}{n+5}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{\frac{n+5}{-3}}\right)}_{\to e}^{\underbrace{\frac{-3}{n+5}\cdot n}_{\to -3}}=e^{-3}$$

$\Rightarrow R=e^{3}$.

Ответ: $R=e^{3}$.

Задача 8. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}2^{(\ln n)^2}x^n$.

Решение.

В этом случае $a_n=2^{(\ln n)^2}$.

Поэтому

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{(\ln n)^2}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{(\ln n)^2}{n}}=2^0=1$$

$\Rightarrow R=1$.

То, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}=0$, надо уже запомнить либо доказать, использовав правило Лопиталя – Бернулли.

Ответ: $R=1$.

Задача 9. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$.

Решение.

В этом случае $a_n=\frac{n!}{n^n}$.

Поэтому (воспользуемся формулой Стирлинга)

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}{ne}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}{e}=\frac{1}{e}\,.$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ при $a>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

$\Rightarrow R=e$.

Ответ: $R=e$.

Задача 10. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^n}x^n}{n!}$.

Решение.

В этом случае $a_n = \frac{\sqrt{n^n}}{n!}$.

Поэтому (воспользуемся формулой Стирлинга)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n^n}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n n^{\frac{n}{2}}}{n^n \sqrt{2\pi n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} e}{n \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[2n]{2\pi n}} = 0.$$

$\Longrightarrow R = \infty$.

Ответ: $R = \infty$.

Задача 11. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ и исследовать его сходимость в граничных точках.

Решение.

В этом случае $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ и $a_{n+1} = \frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!} = \frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}$.

Поэтому

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left((n+1)!\right)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2 (n!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)(2n+1)(2n)!}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right) = \frac{1}{4}.$$

$\Longrightarrow R = 4$.

Ответ: $R = 4$.

Рассмотрим два очень важных примера.

Задача 12. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} x^{5n}$.

Решение.

Заметим, что в этой сумме отличны от нуля только коэффициенты при $x^5, x^{10}, x^{15}, \ldots$, а остальные коэффициенты равны 0. Поэтому, пользоваться предложенной нам формулой для нахождения радиуса сходимости этого степенного ряда мы не можем (понятие верхнего и нижнего пределов последовательности на химическом факультете в общем курсе обычно не вводят). Как же быть?

Обозначим $x^5 = t$ и получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} t^n$. Исследуем его сходимость.

В этом случае $a_n = \frac{n^2}{3^n}$.

Поэтому

$$\frac{1}{R_t} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3}\right| = \frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow R_t = 3 \Rightarrow (-3; 3) -$ интервал абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} t^n$. Значит, этот ряд абсолютно сходится при

$|t| < 3$, когда $|x^5| < 3 \Leftrightarrow |x| < \sqrt[5]{3} \Rightarrow R_x = \sqrt[5]{3}$.

Ответ: $R = \sqrt[5]{3}$.

Задача 13. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^{2n-1}$.

Решение.

Заметим, что в этой сумме отличны от нуля только коэффициенты при нечетных степенях x, а коэффициенты при четных степенях x равны 0. Поэтому, пользоваться предложенной нам формулой для нахождения радиуса сходимости этого степенного ряда мы не можем, но поступить так же, как в предыдущей задаче, тоже не можем. Как же быть?

Отнесемся к этому ряду как к общему функциональному ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и найдем область его абсолютной сходимости.

Итак, $f_n(x) = \frac{n}{5^n} x^{2n-1}$, тогда $f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{5^{n+1}} x^{2n+1}$ и

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}} x^{2n+1}}{\frac{n}{5^n} x^{2n-1}}\right| = \frac{x^2}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{x^2}{5} \cdot 1 = \frac{x^2}{5}.$$

Далее, $q(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{5}$, то есть ряд абсолютно сходится при $|x| < \sqrt{5}$ и, следовательно, $R = \sqrt{5}$.

Ответ: $R = \sqrt{5}$.

При нахождении радиуса сходимости степенного ряда (вычислении пределов!) приходится использовать различные приемы (эквивалентности, формулы Тейлора, правило Лопиталя – Бернулли и т.д.).

Задача 14. Найти радиус сходимости степенного ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^3} x^n.$

Решение.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|n\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^3}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^2}\right)\boxed{=}$$

но $\cos t \underset{t\to 0}{\sim} 1-\frac{t^2}{2}$

$$\boxed{=}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)=$$

$$=1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{-1}}\right)^{-1}=e^{-1}.$$

$\Rightarrow R=e.$

Ответ: $R=e.$

Задача 15. Найти радиус сходимости степенного ряда

$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2+n+1}\operatorname{arctg} e^{-n}\, x^n.$

Решение.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2+n+1}\operatorname{arctg} e^{-n}\right|}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}}\cdot\sqrt[n]{|\operatorname{arctg} e^{-n}|}\right)\boxed{=}$$

но $\operatorname{arctg} t \underset{t\to 0}{\sim} t$

$$\boxed{=}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}}\cdot\sqrt[n]{e^{-n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{\frac{n}{-1}}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}\cdot\frac{-1}{n}}\cdot e^{-1}\right)=$$

$$=e^{-1}\cdot e^{-1}=e^{-2}.$$

$\Rightarrow R=e^2.$

Ответ: $R = e^2$.

Задача 16. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{3^n} \cdot x^n$.

Решение.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\ln\cos\frac{1}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\ln\left(1 - \frac{1}{2\cdot 3^{2n}}\right)\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|-\frac{1}{2\cdot 3^{2n}}\right|} \boxed{=}$$

так как $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$

$$\boxed{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2\cdot 3^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{3^{2n}}}\right) = 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

$\Rightarrow R = 9$.

Ответ: $R = 9$.