МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ЧАСТЬ 2

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры разложения функций в степенные ряды, суммирования степенных рядов и интегрирования функций с помощью разложения их в степенные ряды.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Разложение в степенные ряды

Считаются известными следующие разложения.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $R = \infty$.
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$.
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$.
4. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$.
5. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$.
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots$, $R = 1$.
7. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$.
8. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $R = 1$.

Замечание. То, что эти ряды сходятся абсолютно внутри интервала сходимости, означает, что эти ряды сходятся абсолютно к значению функции $f(x)$ в каждой точке этого интервала, то есть эти равенства на самом деле являются тождественными равенствами. Но мы, понимая это, все же будем продолжать писать $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ вместо $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, потому что так принято в большей части математической литературы.

Замечание. В записи $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ первое слагаемое при $x = 0$ имеет «странный» вид: $a_0 \cdot 0^0$. Договоримся считать, что оно просто равно a_0.

Терема. Внутри общего интервала сходимости степенные ряды можно складывать почленно.

Терема. Внутри интервала сходимости степенные ряды можно дифференцировать и интегрировать почленно, радиус сходимости ряда при этом не меняется (но может измениться сходимость в граничных точках).

Теорема (вторая теорема Абеля). Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, и этот ряд сходится в точке $x = R$ $(x = -R)$. Тогда сумма ряда непрерывна слева (справа) в точке $x = R$ $(x = -R)$, то есть

$$\lim_{x\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \left(\lim_{x\to R_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\right).$$

Задача 1. С помощью табличных разложений разложить в степенной ряд функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение.

$$e^{-x^2} = \|-x^2 = t\| = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \quad R = \infty.$$

Ответ: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 2. С помощью табличных разложений разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение.

Иногда следует преобразовать функцию к более удобному для разложения виду:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} =$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \ R = \infty.$$

Ответ: $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 3. С помощью табличных разложений разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}$.

Решение.

Преобразуем функцию к виду $f(x) = x^{10} \cdot \frac{1}{1-x}$. Тогда

$$f(x) = x^{10} \cdot \frac{1}{1-x} = x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+10} \underbrace{=}_{n+10=k} \sum_{k=10}^{\infty} x^k, \ R = 1.$$

Ответ: $\frac{x^{10}}{1-x} = \sum_{k=10}^{\infty} x^k$.

Задача 4. С помощью табличных разложений разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

Решение.

Преобразуем функцию к виду $f(x) = x \cdot (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда

$$f(x) = x \cdot (1-2x)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= x \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-2x)^3 + \cdots\right) =$$
$$= x \cdot \left(1 + x + \frac{1\cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot 2^2 x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!} \cdot 2^3 x^3 + \cdots\right) =$$
$$= x \cdot \left(1 + x + \frac{1\cdot 3}{2!} \cdot x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!} \cdot x^3 + \cdots\right) = x \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n\right) =$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}.$$

Так как для этого разложения мы использовали ряд для $(1+t)^{\alpha}$, который сходится при $|t| < 1$, то должно выполняться $|-2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$
$\Rightarrow R = \frac{1}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}$.

Задача 5. С помощью табличных разложений разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$.

Решение.

Преобразуем функцию к виду:

$$f(x) = \frac{-x}{2x^2-x-1} = \frac{-x}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-x}{(x-1)(2x+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+2x}.$$

Здесь мы методом неопределенных коэффициентов разложили рациональную функцию в сумму простейших. Напомним:

$$\frac{-x}{(x-1)(2x+1)} \equiv \frac{a}{x-1} + \frac{b}{2x+1} \equiv \frac{(2a+b)x+(a-b)}{(x-1)(2x+1)} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-1 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Далее получаем

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n =$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + (-1)^{n+1} 2^n\right) x^n.$$

Так как у ряда $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ радиус сходимости равен $R_1 = 1$, а у ряда $\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$ радиус сходимости равен $R_2 = \frac{1}{2}$, то суммировать эти ряды можно только при $|x| < \frac{1}{2}$, то есть радиус сходимости ряда, который является суммой этих рядов, $R = \frac{1}{2}$.

Ответ: $f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^{n+1}2^n)x^n$.

Задача 6. С помощью табличных разложений разложить в степенной ряд функцию $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

Решение.

$$f(x)=(1+x)e^{-x}=e^{-x}+xe^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}\underbrace{=}_{n+1=k}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}x^k=$$
$$=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}x^k=$$
$$=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\right)x^n=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-n}{n!}\right)x^n=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n.$$

Поскольку разложение для e^x верно при $\forall x\in\mathbb{R}$, то и последнее разложение будет верно при $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ответ: $f(x)=(1+x)e^{-x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Задача 7. С помощью табличных разложений для производной функции разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

Решение.

В этом случае $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $\forall x\in(-1;1)$.

Но тогда

$$f(x)=C_0+\int f'(x)dx=C_0+\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx=$$
$=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int x^{2n}dx=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, где C_0 – некоторая постоянная, которую нужно найти.

Напомним, что на самом деле здесь выполняется тождественное равенство, то есть равенство, которое выполняется в каждой точке интервала сходимости, в частности, при $x=0$:

$$f(0)=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}0^{2n+1}$$

$$\operatorname{arctg}0=C_0+0\Leftrightarrow 0=C_0+0\Leftrightarrow C_0=0.$$

Следовательно, $f(x) = \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Заметим, что этот ряд сходится и при $x = \pm 1$ (по признаку Лейбница). Поэтому по второй теореме Абеля $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ и при $x = \pm 1$.

Ответ: $f(x) = \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $\forall x \in [-1; 1]$.

Задача 8. С помощью табличных разложений для производной функции разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Решение.

В этом случае $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$

$= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(x^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(x^2)^3 + \cdots\right) =$

$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot x^6 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} x^{2n}, \quad R = 1.$

Но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} x^{2n}$ сходится и при $x = \pm 1$, поэтому $f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} x^{2n}, \quad \forall x \in [-1; 1].$

Но тогда

$f(x) = C_0 + \int f'(x)dx = C_0 + \int \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} x^{2n}\right) dx =$

$= C_0 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} \int x^{2n}dx = C_0 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)} x^{2n+1} =$

$= C_0 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!\cdot(2n+1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)\cdot(2n+1)} x^{2n+1} =$

$= C_0 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)^2} x^{2n+1} = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)^2} x^{2n+1},$

$\forall x \in [-1; 1]$,

где C_0 – некоторая постоянная, которую нужно найти.

Напомним, что на самом деле здесь выполняется тождественное равенство, то есть равенство, которое выполняется в каждой точке интервала сходимости, в частности, при $x = 0$:

$f(0) = C_0 + 0$.

$\ln\left(0 + \sqrt{1+0}\right) = C_0 \Leftrightarrow C_0 = 0.$

Следовательно, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)^2} x^{2n+1}$, $\forall x \in [-1; 1]$.

Ответ: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)^2}x^{2n+1}$, $\forall x\in[-1;1]$.

Замечание. В этой задаче мы сначала получили разложение функции $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ в ряд $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$, а затем преобразовали его к виду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)^2}x^{2n+1}$. Обязательно ли это делать? Нет. Это дело вкуса и сообразительности. Но мы должны понимать, что ответ может быть записан в разных видах, и надо уметь это видеть.

Задача 9. С помощью табличных разложений для производной функции разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\arcsin x$.

Решение.

В этом случае $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x^2)^3+\cdots\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\cdot x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}\cdot x^6+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot(2n+1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n},$$

$\forall x\in(-1;1)$.

Но тогда

$$f(x)=C_0+\int f'(x)dx=C_0+\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n}\right)dx=$$

$$=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\int x^{2n}dx=$$

$$=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)^2}x^{2n+1},$$

где C_0 – некоторая постоянная, которую нужно найти.

Напомним, что на самом деле здесь выполняется тождественное равенство, то есть равенство, которое выполняется в каждой точке интервала сходимости, в частности, при $x=0$:

$f(0)=C_0+0$.

$\arcsin 0=C_0\Leftrightarrow C_0=0$.

Следовательно, $f(x)=\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)^2}x^{2n+1}$.

Заметим, что этот ряд сходится и при $x=\pm1$. Поэтому по второй теореме Абеля $\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ и при $x=\pm1$.

Ответ: $f(x) = \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n! \cdot (2n+1)^2} x^{2n+1}$, $\forall x \in [-1; 1]$.

Задача 10. С помощью табличных разложений для производной функции разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$.

Решение.

Найдем те x, при которых $\frac{1-2x}{1+2x} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Заметим, что при этих значениях x выполняются условия $1 - 2x > 0$ и $1 + 2x > 0$, и поэтому $\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}}$. Это пригодится нам в дальнейших преобразованиях.

В этом случае

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1-2x}{1+2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}} \cdot \frac{-2(1+2x)-(1-2x)\cdot 2}{(1+2x)^2} = \frac{1}{1+\frac{1-2x}{1+2x}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{-2}{(1+2x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1-2x}{1+2x}} \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot \frac{-2}{1+2x} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{1+2x+1-2x} \cdot \frac{-2\sqrt{1+2x}}{(1+2x)\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{1+2x}\sqrt{1-2x}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = -(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-4x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-4x^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-4x^2)^3 + \cdots\right) =$$

$$= -\left(1 + 2x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 4^2}{2^2\cdot 2!}\cdot x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 4^4}{2^3\cdot 3!}\cdot x^6 + \cdots\right) = -\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\cdot 2^n}{n!} x^{2n}\right) =$$

$$= -\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\cdot 2^n (2n+1)}{n!(2n+1)} x^{2n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!(2n+1)} x^{2n}, \ \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Но тогда

$$f(x) = C_0 + \int f'(x)dx = C_0 - \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!(2n+1)} x^{2n}\right) dx =$$

$$= C_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!\cdot(2n+1)} \int x^{2n} dx =$$

$$= C_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!\cdot(2n+1)\cdot(2n+1)} x^{2n+1} = C_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!\cdot(2n+1)^2} x^{2n+1},$$

где C_0 – некоторая постоянная, которую нужно найти.

Напомним, что на самом деле здесь выполняется тождественное равенство, то есть равенство, которое выполняется в каждой точке интервала сходимости, в частности, при $x = 0$:

$f(0) = C_0 - 0.$

$\operatorname{arctg} 1 = C_0 \Leftrightarrow C_0 = \frac{\pi}{4}.$

Следовательно, $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!(2n+1)^2} x^{2n+1}$.

Заметим, что этот ряд сходится и при $x = \frac{1}{2}$, а при $x = -\frac{1}{2}$ не определен. Поэтому по второй теореме Абеля $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ и при $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!(2n+1)^2} x^{2n+1}$, $\forall x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Замечание. Использовав соотношения $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ и $(2n+1)!!\,(2n)!! = (2n+1)!$, ответ к этой задаче можно переписать в виде:

$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n}{n!(2n+1)^2} x^{2n+1} =$

$= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\cdot 2^n \cdot (2n)!!}{n!(2n+1)^2\cdot(2n)!!} x^{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!\cdot 2^n}{n!(2n+1)^2\cdot 2^n\cdot n!} x^{2n+1} =$

$= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n)!}{n!(2n+1)^2\cdot n!} x^{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$.

Замечание. Ну и, конечно, полезно отметить, что C_0 отнюдь не всегда равняется нулю…

Задача 11. С помощью табличных разложений для производной функции разложить в степенной ряд функцию $f(x) = x \arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}$.

Ответ: $f(x) = x \arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+2)} x^{4n+3}$, $R = \sqrt{2}$, (сделайте самостоятельно).

Иногда приходится решать обратную задачу.

Задача 12. Найти сумму ряда $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

Решение.

Пусть сумма этого ряда равна $S(x)$, то есть $S(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

Тогда

$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, $\forall x \in (-1; 1)$.

И поэтому

$S(x) = C_0 + \int S'(x)dx = C_0 + \int \frac{1}{1-x^2}dx = C_0 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \ C_0 \in \mathbb{R}$

Но так как

$S(0) = 0 = C_0 + \frac{1}{2}\ln 1 \Leftrightarrow C_0 = 0$, то

$S(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Ответ: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$.

Задача 13. Найти сумму ряда $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$

Решение.

Пусть сумма этого ряда равна $S(x)$, то есть

$$S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = x\underbrace{(1 + 2x + 3x^2 + \cdots)}_{\text{обозначим } \varphi(x)} = x\varphi(x).$$

Тогда

$\Phi(x) = C + \int \varphi(x)dx = C + \int(1 + 2x + 3x^2 + \cdots)dx =$
$= C + x + x^2 + x^3 + \cdots = C - 1 + 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = C_1 + \frac{1}{1-x}$,
$\forall x \in (-1; 1)$.

Следовательно,

$\varphi(x) = \Phi'(x) = \left(C_1 + \frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \ C, C_1 \in \mathbb{R}.$

И поэтому

$S(x) = x\varphi(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ответ: $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

Задача 14. Найти сумму ряда $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$

Решение.

Пусть сумма этого ряда равна $S(x)$, то есть

$$S(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots = x\underbrace{(1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 \ldots)}_{\text{обозначим } \varphi(x)} = x\varphi(x).$$

Поскольку для $\varphi(x)$ радиус сходимости $R = 1$, то внутри интервала сходимости его можно проинтегрировать почленно.

Тогда

$$\Phi(x) = C + \int \varphi(x)dx = C + \int(1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 \dots)dx =$$
$$= C + x - 2x^2 + 3x^3 - \cdots = C + x\underbrace{(1 - 2x + 3x^2 - \cdots)}_{\text{обозначим } \psi(x)} = C + x\psi(x).$$

Далее,

$$\Psi(x) = C_1 + \int \psi(x)dx = C_1 + x - x^2 + x^3 - \cdots =$$
$$= C_1 + 1 - 1 + x - x^2 + x^3 - \cdots = C_2 - (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) =$$
$$= C_2 - \frac{1}{1+x}.$$

Поэтому

$$\psi(x) = \Psi'(x) = \left(C_2 - \frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Phi(x) = C + x\psi(x) = C + \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \left(C + \frac{x}{(1+x)^2}\right)' = \frac{1-x}{(1+x)^3}, \quad C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

И окончательно получаем, что

$$S(x) = x\varphi(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

Ответ: $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, \ |x| < 1.$

2. Интегрирование функций с помощью степенных рядов

Задача 1. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение.

Важное замечание. Этот интеграл (как и все последующие) не берется в элементарных функциях. Кроме того, функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, но (!) имеет в этой точке устранимый разрыв, так как $\lim\limits_{x \to \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Поэтому мы доопределим эту функцию значением в точке $x = 0$ этим предельным значением и рассмотрим непрерывную на всей оси функцию $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

которую и будем интегрировать. Аналогично будем поступать во многих других задачах, но делать это будем «по умолчанию»… Обратите внимание, что полученный в результате ряд будет бесконечно дифференцируемой на интервале сходимости (в частности, при $x = 0$) функцией.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{2n} dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + C,\ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\int \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + C,\ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Задача 2. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x} dx.$

Решение.

$$\int \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x} dx = \int \frac{-1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{x} dx = \int \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{x} dx =$$
$$= \int \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} \right) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int x^{2n-1} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!(2n)} + C,\ C \in \mathbb{R},$$
$\forall x \in \mathbb{R}.$

Ответ: $\int \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!(2n)} + C,\ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int \frac{e^x - 1 - x - x^2}{x} dx.$

Решение.

$$\int \frac{-1 - x - x^2 + e^x}{x^2} dx = \int \frac{-1 - x - x^2 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}{x^2} dx = \int \frac{-\frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x^2} dx =$$
$$= \int \left(-\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right) dx = -\frac{x}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)} + C,\ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\int \frac{-1 - x - x^2 + e^x}{x^2} dx == -\frac{x}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)} + C,\ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Далее рассмотрим интегралы с ***переменным верхним пределом***:

$$\int_0^x f(t) dt.$$

Пусть $F(t)$ – первообразная для $f(t)$, то есть $F_t'(t) = f(t)$, причем такая, что $F(0) = 0$.

Тогда $\int_0^x f(t) dt = F(t)\Big|_{t=0}^{t=x} = F(x) - F(0) = F(x).$

Или $\int_0^x f(x)dx = F(x)\Big|_{x=0}^{x=x} = F(x) - F(0) = F(x)$.

Или $\int_0^x f(x)dx = F(x)$.

Заметим, что последняя запись гораздо короче, что, конечно, очень удобно. В дальнейшем мы будем пользоваться именно такой записью. Но в этом тексте вообще-то предполагается, что «x», который стоит в верхнем пределе, и «x» под знаком интеграла (переменная интегрирования) – это разные «x»… Если кому-то это не комфортно, можно продолжать записывать интегралы в виде $\int_0^x f(t)dt$ и т.д.

Итак, пусть был степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. После интегрирования получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$, то есть ряд, степени x в котором начнутся с первой. Но тогда этот ряд будет задавать функцию, для которой выполнено условие $F(0) = 0$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_0^x e^{-x^2} dx$.

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}\right) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right) dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\int_0^x e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Вычислить интеграл $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

Решение.

Сначала разложим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Поэтому $f(x) = \operatorname{arctg} x = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall x \in [-1; 1]$.

Вернемся к исходному интегралу.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \forall x \in [-1; 1].$$

Ответ: $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \forall x \in [-1; 1]$.

Задача 6. Вычислить интеграл $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение.

Сначала разложим функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ в степенной ряд.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}=$

$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^4)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^4)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x^4)^3+\cdots=$

$=1+\frac{1}{2}\cdot x^4+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}\cdot x^8+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}\cdot x^{12}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n}}{n!\cdot 2^n}$, $\forall x\in(-1;1)$.

Вернемся к исходному интегралу.

$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n}}{n!\cdot 2^n}\right)dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n+1}}{n!\cdot 2^n(4n+1)}$, $\forall x\in[-1;1]$.

Ответ: $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n+1}}{n!\cdot 2^n(4n+1)}$, $\forall x\in[-1;1]$.

Замечание. Часто все-таки бывает нужно разложить функцию не по степеням x (ряд Маклорена), а по степеням $(x-x_0)$ (общий ряд Тейлора). Как это сделать? Безусловно, остается общая формула:

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Но иногда удается воспользоваться табличными разложениями. Для этого функцию $f(x)$ надо сначала записать в виде:

$f(x)=f((x-x_0)+x_0)$.

Задача 7. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ по степеням $(x-1)$.

Решение.

$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{(x-1)+1}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$, $\forall x\in(0;2)$.

Ответ: $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$, $\forall x\in(0;2)$.

Задача 8. Разложить функцию $f(x)=\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Решение.

$f'(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{(x-1)+1}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$, $\forall x\in(0;2)$.

Поэтому $f(x)=\ln x=\int_1^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$.

Заметим, что этот ряд сходится и при $x = 2$. Поэтому по второй теореме Абеля $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ и при $x = 2$.

Следовательно, получаем, что

$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}, \ \forall x \in (0; 2]$.

Ответ: $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}, \ \forall x \in (0; 2]$.

Задача 9. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ по степеням $(x+4)$.

Решение.

Разложим дробь в сумму простейших:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} \equiv \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \equiv \frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+4)-3} - \frac{1}{(x+4)-2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{(x+4)}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{(x+4)}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1}(x+4)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}(x+4)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 3^{-n-1})(x+4)^n, \ \forall x \in (-6; -2).$$

Ответ: $\frac{1}{x^2+3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 3^{-n-1})(x+4)^n, \ \forall x \in (-6; -2)$.

Задача 10. Разложить функцию $f(x) = e^x$ по степеням $(x+2)$.

Решение.

$$f(x) = e^x = e^{(x+2)-2} = e^{-2} e^{(x+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 11. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням $(x-4)$.

Решение.

$$f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{(x-4)+4} = \sqrt{4+(x-4)} = 2\sqrt{1+\frac{(x-4)}{4}} = 2\left(1+\frac{(x-4)}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x-4}{4} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(\frac{x-4}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(\frac{x-4}{4}\right)^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}\left(\frac{x-4}{4}\right)^4 + \cdots\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{x-4}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot(x-4)^2}{2^2\cdot 2!\cdot 4^2} + \frac{1\cdot 3\cdot(x-4)^3}{2^3\cdot 3!\cdot 4^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(x-4)^3}{2^4\cdot 4!\cdot 4^4} + \cdots\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{x-4}{2\cdot 4} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!!(x-4)^n}{2^n\cdot n!\cdot 4^n}\right) =$$

$$= 2 + \frac{x-4}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!!(x-4)^n}{2^{3n-1}\cdot n!}.$$

Здесь интервал сходимости определяется условием

$$\left|\frac{x-4}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |x-4| < 4 \Leftrightarrow 0 < x < 8.$$

Но так как ряд сходится и в точках $x = 0$ и $x = 8$, то по второй теореме Абеля $\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!!(x-4)^n}{2^{3n-1}\cdot n!}$, $\forall x \in [0;8]$.

Ответ: $\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!!(x-4)^n}{2^{3n-1}\cdot n!}$, $\forall x \in [0;8]$.

Задача 11. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$f(x) = \sin x = \sin\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 12. Разложить функцию $f(x) = \cos^2 x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\cos^2 x = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.