МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления производных явно заданных функций, неявно заданных функций, параметрически заданных функций, показательно-степенных функций. Рассмотрены примеры для вычисления производных произвольного порядка (метод математической индукции) и применение формулы Лейбница.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Конечно, первое, что нужно сделать, – это выучить табличные производные.

Таблица производных

1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

2) $(\sin x)' = \cos x$

3) $(\cos x)' = -\sin x$

4) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

5) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

6) $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

Свойства производной

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции, C – константа, тогда

1) $(Cf(x))' = Cf'(x)$

2) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

3) $(fg)' = f'g + fg'$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg\prime}{g^2}$

5) Производная сложной функции: пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая функция в точке x, функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y. Тогда сложная функция $z(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x и

$$z'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

Очень полезно привыкать к фразе: «производная функции какого-то аргумента по этому аргументу…».

Примеры.

В примерах на вычисление производной сложной функции мы не всегда будем «упрощать» результат вычисления производной, чтобы лучше была видна последовательность действий…

1) $(3x^2 - 5x + 1)' = 6x - 5$

2) $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}} + C\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} + 0 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3) $\left(\sqrt{x}\left(x^3 - \sqrt{x} + 1\right)\right)' = \left(x^{\frac{7}{2}} - x + \sqrt{x}\right)' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$
$= \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)\right)' = \left(1 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)' = \left(-\sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$
$= -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

5) $\left(\frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}\right)' = (t^{-1} - 5t^{-2} - t^{-3})' = -t^{-2} + 10t^{-3} + 3t^{-4} =$
$= \frac{-t^2 + 10t + 3}{t^4}$

6) $(\sin x + 2\cos x + 5\sin 3)' = \cos x - 2\sin x + 0 = \cos x - 2\sin x$

7) $\Big(\underbrace{\sin \underbrace{3x}}\Big)' = \cos 3x \cdot 3$

8) $\Big(\underbrace{\operatorname{tg} \underbrace{5x}}\Big)' = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5$

9) $(\cos^3 x)' = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\cos x}\right)^3}\right)' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$

10) $(\sin^5 2x)' = \left(\underbrace{\left(\sin \underbrace{2x}\right)^5}\right)' = 5\sin^4 2x \cdot \cos 2x \cdot 2$

11) $\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = \left(\underbrace{\sin\underbrace{\frac{1}{x}}}\right)' = \cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

12) $(\ln 5x)' = \left(\underbrace{\ln\underbrace{5x}}\right)' = \frac{1}{5x}\cdot 5 = \frac{1}{x}$ (продумайте результат!)

13) $(\ln\sin 3x)' = \left(\underbrace{\ln\underbrace{\sin\underbrace{3x}}}\right)' = \frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3$

14) $(\ln^7(x^2-3x))' = \left(\underbrace{\left(\ln\underbrace{(x^2-3x)}\right)^7}\right)' =$

$= 7\ln^6(x^2-3x)\cdot\frac{1}{x^2-3x}\cdot(2x-3)$

15) $\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)' = \frac{(e^x)'\sin x - e^x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{e^x\sin x - e^x\cos x}{\sin^2 x}$

16) $(e^{3x}\sin 5x)' = (e^{3x})'\sin 5x + e^{3x}(\sin 5x)' =$
$= e^{3x}\cdot 3\cdot\sin 5x + e^{3x}\cdot\cos 5x\cdot 5$

17) $(\sin 4x\cdot\operatorname{sh} 3x)' = \cos 4x\cdot 4\cdot\operatorname{sh} 3x + \sin 4x\cdot\operatorname{ch} 3x\cdot 3$

18) $(\operatorname{arctg}^3 7x)' = \left(\underbrace{\left(\operatorname{arctg}\underbrace{7x}\right)^3}\right)' = 3\operatorname{arctg}^2 7x\cdot\frac{1}{1+(7x)^2}\cdot 7$

19) $\left((x^6-x)\operatorname{tg} 4x\right)' = (6x^5-1)\cdot\operatorname{tg} 4x + (x^6-x)\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4$

20) $(\arcsin^3 5x)' = \left(\underbrace{\left(\arcsin\underbrace{5x}\right)^3}\right)' = 3\arcsin^2 5x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot 5$

21) $\left(\ln^4\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}\right)\right)' = \left(\underbrace{\left(\ln\underbrace{\operatorname{arctg}\underbrace{\sqrt{\underbrace{x^2-9}}}}\right)^4}\right)' =$

$= 4\ln^3\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-9}}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-9}}\cdot 2x$

Замечание. Если производная дифференцируемой функции $f(x)$ снова является дифференцируемой функцией, то у нее снова можно взять производную. Получим функцию $f''_{xx}(x) = f''_{x^2}(x)$. И так далее…

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически, то есть заданы функции

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in (\alpha; \beta). \end{cases}$$

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ – дважды дифференцируемые функции и $x'_t(t) \neq 0$, то

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \quad \text{и} \quad y''_{xx}(t) = \frac{\left(y'_x(t)\right)'_t}{x'_t(t)} = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}.$$

Задача 1. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t), a > 0. \end{cases}$

Найти $y'_x(\pi)$ и $y''_{xx}(\pi)$.

Решение.

$x'_t(t) = a(1 - \cos t)$

$x''_{tt}(t) = a \sin t$

$y'_t(t) = a \sin t$

$y''_{tt}(t) = a \cos t$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin\frac{t}{2} \cos\frac{t}{2}}{2 \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{a \cos t \cdot a(1 - \cos t) - a \sin t \cdot a \sin t}{(a(1 - \cos t))^3} = \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{a(1 - \cos t)^3} =$$
$$= \frac{\cos t - 1}{a(1 - \cos t)^3} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4a \sin^4\frac{t}{2}}$$

$$y'_x(\pi) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$$

$$y''_{xx}(\pi) = -\frac{1}{4a \sin^4\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4a} < 0 \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Заметим, что при выполнении двух последних условий параметрически заданная функция $y = y(x)$ при $t_0 = \pi$ (то есть в точке $M_0(\pi a; 2a)$) имеет локальный максимум.

Ответ: $y'_x(t) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$; $y''_{xx}(t) = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; $y'_x(\pi) = 0$; $y''_{xx}(\pi) = -\frac{1}{4a}$.

Задача 2. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\sin t \\ y(t) = e^{-t}\cos t. \end{cases}$

Вычислить значения производных при $t = 0$.

Решение.

$$x'_t(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$x''_{tt}(t) = -e^{-t}(\cos t - \sin t) + e^{-t}(-\sin t - \cos t) = -2e^{-t}\cos t$$

$$y'_t(t) = -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$y''_{tt}(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) - e^{-t}(-\sin t + \cos t) = 2e^{-t}\sin t$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-e^{-t}(\cos t + \sin t)}{e^{-t}(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{2e^{-t}\sin t \cdot e^{-t}(\cos t - \sin t) + e^{-t}(\cos t + \sin t)\cdot\left(-2e^{-t}\cos t\right)}{\left(e^{-t}(\cos t - \sin t)\right)^3} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sin t\cos t - \sin^2 t - \cos^2 t - \sin t\cos t}{e^{-t}(\cos t - \sin t)^3} = -\frac{2}{e^{-t}(\cos t - \sin t)^3}.$$

$$y'_x(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1,\ y''_{xx}(0) = \frac{-2}{1\cdot(1-0)^3} = -2$$

Ответ: $y'_x(t) = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$; $y''_{xx}(t) = -\frac{2}{e^{-t}(\cos t - \sin t)^3}$.

$y'_x(0) = -1,\ y''_{xx}(0) = -2.$

Задача 3. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = e^{t}(\cos t + \sin t) \\ y(t) = e^{t}(\cos t - \sin t). \end{cases}$

Решение.

$$x'_t(t) = e^t(\cos t + \sin t) + e^t(-\sin t + \cos t) = 2e^t\cos t$$

$$x''_{tt}(t) = 2e^t\cos t - 2e^t\sin t = 2e^t(\cos t - \sin t)$$

$$y'_t(t) = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t\sin t$$

$$y''_{tt}(t) = -2e^t\sin t - 2e^t\cos t = -2e^t(\cos t + \sin t)$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-2e^t \sin t}{2e^t \cos t} = -\operatorname{tg} t$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{-2e^t(\cos t + \sin t)\cdot 2e^t \cos t + 2e^t \sin t \cdot 2e^t(\cos t - \sin t)}{(2e^t \cos t)^3} =$$

$$= \frac{-\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t - \sin^2 t}{2e^t \cos^3 t} = -\frac{1}{2e^t \cos^3 t}\,.$$

Ответ: $y'_x(t) = -\operatorname{tg} t$; $y''_{xx}(t) = -\frac{1}{2e^t \cos^3 t}$.

Задача 4. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$, если $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t \operatorname{arctg} t - \ln\sqrt{1+t^2}\,. \end{cases}$

Решение.

$$x'_t(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2+1)$$

$$x''_{tt}(t) = 6t$$

$$y'_t(t) = \operatorname{arctg} t + t \cdot \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot 2t = \operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t$$

$$y''_{tt}(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{\operatorname{arctg} t}{3(t^2+1)}$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - y'_t(t)x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{\frac{1}{1+t^2}\cdot 3(t^2+1) - \operatorname{arctg} t \cdot 6t}{\left(3(t^2+1)\right)^3} = \frac{3 - \operatorname{arctg} t \cdot 6t}{\left(3(t^2+1)\right)^3} = \frac{1 - 2t \operatorname{arctg} t}{9(t^2+1)^3}\,.$$

Ответ: $y'_x(t) = \frac{\operatorname{arctg} t}{3(t^2+1)}$; $y''_{xx}(t) = \frac{1-2t \operatorname{arctg} t}{9(t^2+1)^3}$.

Производная неявно заданной функции

Если задано уравнение $F(x, y) = 0$, то говорят, что функция $y = y(x)$ задана неявно этим уравнением. Предположим, что такая функция существует и является дифференцируемой. Чтобы найти производную $y'_x(x)$, запишем исходное уравнение в виде $F(x, y(x)) = 0$ и вычислим производную сложной функции. Получим уравнение, линейное относительно y'_x и решим это уравнение.

Задача 1. Пусть функция $y(x)$ задана в виде $x + y = e^{x-y}$. Найти производные y'_x и y''_{xx}.

Решение.

$x + y(x) = e^{x-y(x)}$

Продифференцируем равенство по x:

$1 + y'_x = e^{x-y}(1 - y'_x)$.

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$1 + y'_x = e^{x-y} - e^{x-y}y'_x$

$y'_x(1 + e^{x-y}) = e^{x-y} - 1$

$y'_x = \frac{e^{x-y}-1}{1+e^{x-y}}$.

Но по условию $e^{x-y} = x + y$, поэтому

$y'_x = \frac{x+y-1}{x+y+1}$.

Чтобы найти вторую производную y''_{xx}, надо продифференцировать последнее равенство.

$$y''_{xx} = \left(\frac{x+y-1}{x+y+1}\right)'_x = \left(\frac{x+y(x)-1}{x+y(x)+1}\right)'_x = \frac{(x+y(x)-1)'_x(x+y+1)-(x+y-1)(x+y(x)+1)'_x}{(x+y+1)^2} =$$

$$= \frac{(1+y'_x)(x+y+1)-(x+y-1)(1+y'_x)}{(x+y+1)^2} = \frac{(1+y'_x)(x+y+1-x-y+1)}{(x+y+1)^2} = 2 \cdot \frac{(1+y'_x)}{(x+y+1)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(1+\frac{x+y-1}{x+y+1}\right)}{(x+y+1)^2} = 2 \cdot \frac{(x+y+1+x+y-1)}{(x+y+1)^3} = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}.$$

Заметим, что производные $y'_x = y'_x(x, y)$ и $y''_{xx} = y''_{xx}(x, y)$ являются функциями «точки на плоскости».

Ответ: $y'_x(x, y) = \frac{x+y-1}{x+y+1}$; $y''_{xx}(x, y) = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$.

Замечание. При дифференцировании полезно вместо y писать $y(x)$, чтобы не забыть, что y является функцией аргумента x.

Задача 2. Пусть функция $y(x)$ задана уравнением $x^2 - 1 + \cos xy = 0$. Найти производные y'_x и y''_{xx}.

Решение.

$x^2 - 1 + \cos(xy(x)) = 0$

Продифференцируем равенство по x:

$2x - \sin(xy)\,(1 \cdot y + x \cdot y'_x) = 0$.

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$2x - y\sin(xy) - xy'_x \sin(xy) = 0$

$xy'_x \sin xy = 2x - y\sin xy$

$y'_x = \frac{2x - y\sin xy}{x\sin xy}$.

Чтобы посчитать y''_{xx}, надо продифференцировать либо равенство $xy'_x \sin xy = 2x - y\sin xy$, либо равенство $y'_x = \frac{2x - y\sin xy}{x\sin xy}$, записав его максимально «красиво» для дифференцирования. Перепишем y'_x в виде (почленно поделив):

$y'_x = \frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}$

$y'_x(x) = \frac{2}{\sin xy(x)} - \frac{y\,(x)}{x}$.

Далее,

$$y''_{xx} = \frac{-2\cdot\cos xy\cdot(y + x\cdot y'_x)}{\sin^2 xy} - \frac{y'_x\cdot x - y}{x^2} = \frac{-2\cdot\cos xy\cdot\left(y + x\cdot\left(\frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}\right)\right)}{\sin^2 xy} - \frac{\left(\frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}\right)\cdot x - y}{x^2} =$$

$$= \frac{-2\cdot\cos xy\cdot\left(y + \frac{2x}{\sin xy} - y\right)}{\sin^2 xy} - \frac{\frac{2x}{\sin xy} - y - y}{x^2} = \frac{-2\cdot\cos xy\cdot\left(\frac{2x}{\sin xy}\right)}{\sin^2 xy} - \frac{\frac{2x}{\sin xy} - 2y}{x^2} =$$

$$= \frac{-4x\cos xy}{\sin^3 xy} - \frac{2x - 2y\sin xy}{x^2\sin xy} = \frac{2(y\sin xy - x)}{x^2\sin xy} - \frac{-4x\cos xy}{\sin^3 xy}.$$

Ответ: $y'_x(x,y) = \frac{2}{\sin xy} - \frac{y}{x}$; $y''_{xx}(x,y) = \frac{2(y\sin xy - x)}{x^2\sin xy} - \frac{-4x\cos xy}{\sin^3 xy}$.

Задача 3. Пусть функция $y(x)$ задана уравнением $x^3 + 4y^3 - 3yx^2 = 0$. Найти производные y'_x и y''_{xx}.

Решение.

$x^3 + 4y^3(x) - 3y(x)x^2 = 0$.

Продифференцируем равенство по x:

$3x^2 + 4 \cdot 3y^2 y'_x - 3y'_x x^2 - 3y \cdot 2x = 0$.

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$y'_x(12y^2 - 3x^2) = 6xy - 3x^2$

$y'_x = \frac{6xy-3x^2}{12y^2-3x^2} = \frac{x}{2y+x}$.

Чтобы найти вторую производную y''_{xx}, надо продифференцировать последнее равенство.

$$y''_{xx} = \left(\frac{x}{2y+x}\right)'_x = \left(\frac{x}{2y(x)+x}\right)'_x = \frac{1\cdot(2y+x)-x\cdot(2y'_x+1)}{(2y+x)^2} = \frac{2y+x-x\cdot\left(2\cdot\frac{x}{2y+x}+1\right)}{(2y+x)^2} =$$
$$= \frac{2y+x-x\cdot\left(2\cdot\frac{x}{2y+x}+1\right)}{(2y+x)^2} = \frac{2y+x-2x\cdot\frac{x}{2y+x}-x}{(2y+x)^2} = \frac{2y-2x\cdot\frac{x}{2y+x}}{(2y+x)^2} = \frac{2y(2y+x)-2x^2}{(2y+x)^2} = \frac{4y^2+2xy-2x^2}{(2y+x)^2}.$$

Ответ: $y'_x(x,y) = \frac{x}{2y+x}$; $y''_{xx}(x,y) = \frac{4y^2+2xy-2x^2}{(2y+x)^2}$.

Задача 4. Пусть функция $y(x)$ задана в виде $2y = 1 + xy^3$. Найти производные $y'_x(M)$ и $y''_{xx}(M)$ в точке $M(1;1)$.

Решение.

$2y(x) = 1 + xy^3(x)$.

Продифференцируем равенство по x:

$2y'_x = 1\cdot y^3 + x\cdot 3y^2\cdot y'_x$.

Получили линейное уравнение относительно y'_x. Решим это уравнение относительно y'_x.

$y'_x(2 - 3xy^2) = y^3$

$y'_x = \frac{y^3}{2-3xy^2}$.

Следовательно,

$y'_x(M) = \frac{1}{2-3} = -1$.

Чтобы найти вторую производную y''_{xx}, надо продифференцировать равенство $y'_x = \frac{y^3}{2-3xy^2}$.

$$y''_{xx} = \left(\frac{y^3}{2-3xy^2}\right)'_x = \left(\frac{y^3(x)}{2-3xy^2(x)}\right)'_x = \frac{3y^2y'_x(2-3xy^2)-y^3(-3y^2-3\cdot 2yy'_x)}{(2-3xy^2)^2} .$$

Заметим, что для вычисления $y''_{xx}(M)$ достаточно в последнее равенство, не упрощая его, подставить координаты точки M и значение $y'_x(M)$:

$$y''_{xx}(M)=\frac{3\cdot1\cdot(-1)\cdot(2-3\cdot1\cdot1)-1\cdot(-3-6\cdot1\cdot(-1)}{(2-3\cdot1\cdot1)^2}=\frac{3-3}{1}=0.$$

Ответ: $y'_x(M)=y'_x(1;1)=-1;\;\; y''_{xx}(M)=y''_{xx}(1;1)=0.$

Производная показательно-степенной функции

Функция $y=\left(f(x)\right)^{h(x)}$ называется ***показательно-степенной***. Напомним, что поскольку эта функция является показательной, то область ее определения задается условием $f(x)>0$. При этом сама функция также будет принимать только положительные значения.

Производную показательно-степенной функции можно считать двумя способами.

1-й способ.

$$\left(\left(f(x)\right)^{h(x)}\right)'=\left(e^{\ln\left(f(x)\right)^{h(x)}}\right)'=\left(e^{h(x)\ln f(x)}\right)'=$$
$$=e^{h(x)\ln f(x)}\cdot\left(h(x)\ln f(x)\right)'=\left(f(x)\right)^{h(x)}\left(h'(x)\cdot\ln f(x)+h(x)\cdot\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right).$$

2-й способ (логарифмическая производная).

Так как функция $y=\left(f(x)\right)^{h(x)}$ принимает положительные значения, то равенство $y=\left(f(x)\right)^{h(x)}$ можно прологарифмировать:

$$\ln y=\ln\left(f(x)\right)^{h(x)}$$

$$\ln y(x)=h(x)\ln f(x)\,.$$

Мы получили функцию, заданную неявно. Найдем ее производную.

$$\frac{1}{y}\cdot y'(x)=\left(h'(x)\cdot\ln f(x)+h(x)\cdot\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right)$$

$$y'(x)=y\cdot\left(h'(x)\cdot\ln f(x)+h(x)\cdot\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right)$$

$$y'(x)=\left(f(x)\right)^{h(x)}\cdot\left(h'(x)\cdot\ln f(x)+h(x)\cdot\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right).$$

В дальнейшем мы чаще будем использовать второй способ.

Задача 1. Найти производную функции $y=x^x$.

Решение.

1-й способ.

$$(x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

2-й способ (логарифмическая производная)

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x\ln x$

$\frac{1}{y}\cdot y'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}$

$y'(x) = y\cdot(\ln x + 1)$

$y'(x) = x^x\cdot(\ln x + 1)$.

Ответ: $y'(x) = x^x\cdot(\ln x + 1)$.

Задача 2. Найти производную функции $y = (\sin x)^x$.

Решение.

1-й способ.

$$((\sin x)^x)' = \left(e^{\ln(\sin x)^x}\right)' = \left(e^{x\ln\sin x}\right)' =$$
$$= e^{x\ln\sin x}\left(1\cdot\ln\sin x + x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right) =$$
$$= (\sin x)^x(\ln\sin x + x\cdot\operatorname{ctg} x).$$

2-й способ (логарифмическая производная)

$\ln y = \ln(\sin x)^x$

$\ln y = x\ln(\sin x)$

$\frac{1}{y}\cdot y'(x) = 1\cdot\ln(\sin x) + x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$

$y'(x) = y\cdot(\ln(\sin x) + x\cdot\operatorname{ctg} x)$

$y'(x) = x^x\cdot(\ln(\sin x) + x\cdot\operatorname{ctg} x)$.

Ответ: $y'(x) = (\sin x)^x\cdot(\ln(\sin x) + x\cdot\operatorname{ctg} x)$.

Задача 3. Найти производную функции $y = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$.

Решение.

1-й способ.

$$((\operatorname{arctg} x)^{\cos x})' = \left(e^{\ln(\operatorname{arctg} x)^{\cos x}}\right)' = \left(e^{\cos x\ln\operatorname{arctg} x}\right)' =$$
$$= e^{\cos x\ln\operatorname{arctg} x}\left(-\sin x\cdot\ln\operatorname{arctg} x + \cos x\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) =$$
$$= (\operatorname{arctg} x)^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln\operatorname{arctg} x + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right).$$

2-й способ (логарифмическая производная)

$\ln y = \ln(\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$

$\ln y = \cos x \ln(\operatorname{arctg} x)$

$\frac{1}{y} \cdot y'(x) = -\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$y'(x) = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$

$y'(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$.

Ответ: $y'(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{\cos x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$

Производная n-го порядка.
Метод математической индукции

Метод математической индукции. Пусть задано высказывание $F(n)$. Надо доказать, что это высказывание верно $\forall n \in \mathbb{N}$ (или $\forall n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого).

Для этого проделаем следующее:

1) *Проверим*, что высказывание $F(n)$ верно при $n = 1$ (или другом $n = n_0$) – база индукции.
2) *Предположим*, что высказывание верно при $n = k$.
3) *Докажем*, что тогда высказывание верно при $n = k + 1$.

Задача 1. Найти $(\sin x)^{(n)}$.

Решение.

Заметим, что

$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$(\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$

$(\sin x)''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right)$

$(\sin x)^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right)$.

Возникает предположение, что $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$. Докажем, что это верно.

1) *Проверим*, что формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ верна при $n = 1$. Действительно,

$(\sin x)^{(1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 1\right)$, то есть
$(\sin x)' = \cos x$ – верно.

2) *Предположим*, что формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ верна при $n = k$, то есть

$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot k\right)$.

3) *Докажем*, что тогда формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ верна при $n = k + 1$.

Действительно,

$$(\sin x)^{(k+1)} = \left((\sin x)^{(k)}\right)^{(1)} = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot k\right)\right)^{(1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot k + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot (k + 1)\right).$$

Следовательно, формула верна при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$.

Задача 2. Найти $(\ln x)^{(n)}$.

Решение.

Заметим, что

$(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$(\ln x)'' = -1 \cdot x^{-2}$

$(\ln x)''' = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$

$(\ln x)^{(4)} = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$.

Возникает предположение, что $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n - 1)! \cdot x^{-n}$.
Докажем, что это верно.

1) *Проверим*, что формула $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ верна при $n = 1$. Действительно,

$(\ln x)^{(1)} = (-1)^0 \cdot (0)! \cdot x^{-1}$, то есть
$(\ln x)' = x^{-1}$ – верно.

2) *Предположим*, что формула $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ верна при $n = k$, то есть $(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k}$.

3) *Докажем*, что тогда формула $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$ верна при $n = k+1$.

Действительно,

$$(\ln x)^{(k+1)} = \left((\ln x)^{(k)}\right)^{(1)} = ((-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k})^{(1)} =$$
$$= (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-k) \cdot x^{-k-1} = (-1)^{k} \cdot (k)! \cdot x^{-k-1} =$$
$$= (-1)^{(k+1)-1} \cdot ((k+1)-1)! \cdot x^{-(k+1)}.$$

Получили, что формула верна при $n = k+1$.

Следовательно, формула верна при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$.

Задача 2. Найти $(e^{ax})^{(n)},\ a \neq 0$.

Решение.

Заметим, что

$(e^{ax})' = ae^{ax}$

$(e^{ax})'' = a \cdot ae^{ax} = a^2e^{ax}$

$(e^{ax})''' = a \cdot a^2e^{ax} = a^3e^{ax}$.

Возникает предположение, что $(e^{ax})^{(n)} = a^ne^{ax}$. Докажем, что это верно.

1) *Проверим*, что формула $(e^{ax})^{(n)} = a^ne^{ax}$ верна при $n = 1$. Действительно,

$(e^{ax})^{(1)} = a^1 \cdot e^{ax}$ – верно.

2) *Предположим*, что формула $(e^{ax})^{(n)} = a^ne^{ax}$ верна при $n = k$, то есть $(e^{ax})^{(k)} = a^ke^{ax}$.

3) *Докажем*, что тогда формула $(e^{ax})^{(n)} = a^ne^{ax}$ верна при $n = k+1$.

Действительно,

$$(e^{ax})^{(k+1)} = \left((e^{ax})^{(k)}\right)^{(1)} = (a^k e^{ax})^{(1)} = a^k (e^{ax})^{(1)} = a^k \cdot a e^{ax} = a^{k+1} a e^{ax}.$$

Получили, что формула верна при $n = k + 1$.

Следовательно, формула верна при $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$.

Часто возникает вопрос: «В каком виде записать функцию, чтобы проще было считать производные высокого порядка?».

Пример 1. Найти n-ю производную рациональной функции.

Рациональную функцию нужно разложить в сумму простейших. Например, $\frac{1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$, поэтому

$$\left(\frac{1}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}.$$

Найти производную каждой из простейших дробей можно аналогично тому, как это было сделано в задаче 2.

Пример 2. Найти $\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{(n)}$.

У неправильной дроби $\frac{2x+1}{3x-1}$ надо выделить целую часть, например, так:

$$\frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{\frac{5}{6}}{x-\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{x-\frac{1}{3}}.$$

И задача сводится к вычислению n-й производной простейшей дроби $\frac{1}{x-\frac{1}{3}}$.

Формула Лейбница

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в окрестности точки x производную n-го порядка, то их произведение $u(x)\cdot v(x)$ также имеет в окрестности точки x производную n-го порядка, причем,

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(u)^{(k)}(v)^{(n-k)},$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $(u(x))^{(0)}=u(x)$, $(v(x))^{(0)}=v(x)$.

Эта формула «особенно хороша», когда функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют «почти циклические» производные, или все производные хотя бы одной из функций, начиная с некоторой, тождественно равны нулю.

Задача 1. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x)=(x^2+x+1)e^{-3x}$.

Решение.

$$y^{(n)}(x)=\big((x^2+x+1)e^{-3x}\big)^{(n)}=$$
$$=C_n^0(x^2+x+1)^{(0)}(e^{-3x})^{(n)}+C_n^1(x^2+x+1)^{(1)}(e^{-3x})^{(n-1)}+$$
$$+C_n^2(x^2+x+1)^{(2)}(e^{-3x})^{(n-2)}+\cdots\boxed{=}$$

так как

$(x^2+x+1)^{(1)}=2x+1$

$(x^2+x+1)^{(2)}=2$

$(x^2+x+1)^{(n)}=0,\ \forall n\geq 3$, то

$$\boxed{=}\,\frac{n!}{0!n!}\cdot(x^2+x+1)\cdot((-3)^n e^{-3x})+\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot(2x+1)\cdot((-3)^{n-1}e^{-3x})+$$
$$+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot 2\cdot((-3)^{n-2}e^{-3x})=$$
$$=(x^2+x+1)(-3)^n e^{-3x}+n(2x+1)(-3)^{n-1}e^{-3x}+$$
$$+n(n-1)(-3)^{n-2}e^{-3x}=$$
$$=(-3)^{n-2}e^{-3x}\big((x^2+x+1)\cdot 9+n(2x+1)\cdot(-3)+n(n-1)\big)=$$
$$=(-3)^{n-2}e^{-3x}\big(9x^2+x(9-6n)+(n^2-4n+9)\big).$$

Ответ: $\big(y(x)\big)^{(n)}=(-1)^{n-2}3^{n-2}e^{-3x}\big(9x^2+x(9-6n)+(n^2-4n+9)\big)$.

Задача 2. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x)=(x^2+2x+4)\sin x$.

Решение.

Так как

$(x^2+2x+4)^{(1)} = 2x+2$

$(x^2+2x+4)^{(2)} = 2$

$(x^2+2x+4)^{(n)} = 0, \ \forall n \geq 3$, то

$$\big(y(x)\big)^{(n)} = \big((x^2+2x+4)\sin x\big)^{(n)} =$$
$$= C_n^0(x^2+2x+4)^{(0)}(\sin x)^{(n)} + C_n^1(x^2+2x+4)^{(1)}(\sin x)^{(n-1)} +$$
$$+C_n^2(x^2+2x+4)^{(2)}(\sin x)^{(n-2)} + \cdots =$$
$$= \frac{n!}{0!n!}\cdot(x^2+2x+4)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right) +$$
$$+\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot(2x+2)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)\right) + \frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot 2\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right) =$$
$$= (x^2+2x+4)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right) + n(2x+2)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right) +$$
$$+n(n-1)\cdot\left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}-\pi\right)\right) =$$
$$= (x^2+2x+4)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) - n(2x+2)\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) -$$
$$-n(n-1)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) =$$
$$= (x^2+2x-n^2+n+4)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) - 2n(x+1)\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

Ответ: $y^{(n)}(x) = (x^2+2x-n^2+n+4)\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) -$
$-2n(x+1)\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$

Задача 3. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = e^{-x}\sin x$.

Решение.

$$y^{(n)}(x) = (e^{-x}\sin x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(e^{-x})^{(k)}(\sin x)^{(n-k)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(-1)^k e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi(n-k)}{2}\right).$$

Ответ: $y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(-1)^k e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi(n-k)}{2}\right).$