МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок, создаваемых на основе требований нового учебного плана – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1.1. Напомним коротко основные определения и теоремы.

Определение. Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***ортогональной*** на [a; b], если интеграл

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx$$

равен нулю при $n \neq m$ и не равен нулю при $n = m$.

Теорема. Система функций $\{1, \cos nx\,, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на любом отрезке длины 2π.

Замечание. Об этом полезно не забывать при вычислениях интегралов. Иначе придется выполнять много лишней работы.

Теорема. Если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция на отрезке $[a; b]$ длины 2π, то $f(x) \underbrace{=}_{x\in[a;b]} S(x)$, где

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$,

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)dx$,

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos nx\, dx$,

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\sin nx\, dx$,

причем, если x – точка непрерывности 2π-периодического продолжения $f(x)$, то $S(x) = f(x)$, если x – точка разрыва 1-го рода 2π-периодического продолжения функции $f(x)$, то

$S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, где $f(x+0) = \lim\limits_{\alpha\to 0_+} f(x+\alpha)$, $f(x-0) = \lim\limits_{\alpha\to 0_+} f(x-\alpha)$.

Напомним простую теорему об интегрировании четных и нечетных функций.

Теорема. Если $f(x)$ является четной функцией на $[-a, a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$. Если же $f(x)$ является нечетной функцией на $[-a, a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Задача 1. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. С помощью полученного разложения найти сумму ряда Лейбница $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Решение.

Заметим, что функция $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является нечетной, поэтому функция $f(x)\cos nx = \operatorname{sign}(x)\cos nx$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является нечетной, и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(x)\cos nx\, dx = 0$ (кстати, отсюда мы делаем вывод, что нечетная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция раскладывается в ряд только по синусам кратных дуг).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\operatorname{sign}(x)\sin nx}_{\text{четная}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sign}(x)\sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = -\frac{2}{\pi n}\left(\cos nx\,\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k, \\ \frac{4}{\pi(2k-1)},\ n = 2k-1,\ k = 1,2,3\ldots \end{cases}$$

Следовательно получаем, что

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)}\sin(2k-1)x.$$

Заметим, что 2π-периодическое продолжение функции $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ непрерывно в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$, поэтому $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$, то есть

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)}\sin\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)}\sin\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)}\cos\pi k = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)},$$

и поэтому получаем, что

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = 1,$$

и следовательно

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $f(x) = \text{sign}(x) \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin(2k-1)x$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}$.

Замечание. Напомним, что когда изучались числовые ряды, было рассмотрено очень мало задач, в которых требовалось найти сумму числового ряда. Тогда это была очень непростая задача, в которой требовалось записать несколько первых частичных сумм, угадать и доказать общую формулу для n-ых частичных сумам и найти предел последовательности этих частичных сумм. Заметьте при этом, что догадаться, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}$ будет как-то связана с числом π, было невозможно. В следующих задачах вы увидите, как много рядов можно легко просуммировать, использовав разложение функций в тригонометрические ряды. Это подтверждает тезис о том, что знание математики позволяет решать неочевидные, на первый взгляд, задачи.

Задача 2. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. С помощью полученного разложения найти суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решение.

Заметим, что функция $f(x) = x^2$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является четной, поэтому функция $f(x) \sin nx = x^2 \sin nx$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является нечетной, и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = 0$ (кстати, отсюда мы делаем вывод, что четная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг).

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \boxed{\frac{2\pi^2}{3} = a_0}$.

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx =$

$= \frac{2}{\pi n} \int_{0}^{\pi} x^2 d \sin nx = \frac{2}{\pi n} \left(x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) - \frac{2}{\pi n} \int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx^2 =$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi xd\cos nx = \frac{4}{\pi n^2}x\cos nx\,\Big|_0^\pi - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\pi(-1)^n - \frac{4}{\pi n^3}\sin nx\,\Big|_0^\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n - 0 = \boxed{\frac{4(-1)^n}{n^2} = a_n}.$$

Поэтому $f(x) = x^2 \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

Замечание. Постройте в трех системах координат графики функций:

1. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = \mathbb{R}$.
2. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = (-\pi;\pi)$ и его 2π-периодическое продолжение.
3. $y = S(x)$ с областью определения $D_S = \mathbb{R}$.

Осознайте, что получаются разные кривые.

Эту работу полезно проделывать в каждой задаче.

Заметим, что 2π-периодическое продолжение функции $f(x) = x^2$ непрерывно в точке $x_0 = \pi$, поэтому $f(\pi) = S(\pi)$, то есть

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

и поэтому получаем, что

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \pi^2,$$

и следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2π-периодическое продолжение функции $f(x) = x^2$ непрерывно и в точке $x_0 = 0$, поэтому $f(0) = S(0)$, то есть

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\cdot 0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot 1 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

и поэтому получаем, что

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 0,$$

и следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ответ: $f(x)=x^2 \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Задача 3. Разложить функцию $f(x)=x^2$ на интервале $(0;2\pi)$ в ряд по системе $\{1,\cos nx,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx==\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{8\pi^3}{3}=\boxed{\frac{8\pi^2}{3}=a_0}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}x^2d\sin nx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right)-\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx^2=0-\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}xd\cos nx=\frac{2}{\pi n^2}x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\underbrace{\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}1\cdot\cos nx\,dx}_{=0\text{ (ортогональность!)}}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\cdot 2\pi\cdot 1=\boxed{\frac{4}{n^2}=a_n}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}x^2d\cos nx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi}\right)+\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx^2=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot 4\pi^2\cdot\cos 2\pi n+\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}xd\cos nx=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}\cdot 1+\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^2}x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\underbrace{\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}1\cdot\sin nx\,dx}_{=0\text{ (ортогональность!)}}=\boxed{-\frac{4\pi}{n}=b_n}$$

Поэтому $f(x)=x^2 \underbrace{=}_{(0;2\pi)} \frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx-\frac{\pi}{n}\sin nx.$

Постройте в трех системах координат графики функций:

1. $y=f(x)=x^2$ с областью определения $D_f=\mathbb{R}$.
2. $y=f(x)=x^2$ с областью определения $D_f=(0;2\pi)$ и его 2π-периодическое продолжение.
3. $y=S(x)$ с областью определения $D_S=\mathbb{R}$.

Осознайте, что получаются разные кривые.

Кроме того, заметьте, что получаются разные кривые и в задачах 2 и 3. Но все эти кривые совпадают на $(0;\pi)$! Значит, на интервале $(0;\pi)$ можно получить разные разложения 2π-периодической функции по системе $\{1,\cos nx\,,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Задача 4. Разложить функцию $f(x)=|x|$ на интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд по системе $\{1,\cos nx\,,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Заметим, что функция $f(x)=|x|$ на интервале $(-\pi;\pi)$ является четной, поэтому функция $f(x)\sin nx=|x|\sin nx$ на интервале $(-\pi;\pi)$ является нечетной, и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx=0$. Следовательно функция $f(x)=|x|$раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\boxed{\pi=a_0}$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx=$

$=\frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi} xd\sin nx=\frac{2}{\pi n}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)-\frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=0+\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=$

$=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, n=2k,\\ \frac{2\cdot(-2)}{\pi(2k-1)^2},\ n=2k-1,\ k=1,2,3\ldots\end{cases}$

Поэтому $f(x)=|x|\underbrace{=}_{(-\pi;\pi)}\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$.

Ответ: $f(x)=|x|\underbrace{=}_{(-\pi;\pi)}\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$.

Задача 5. Разложить функцию $f(x)=2\sin x\sin 4x$ на интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд по системе $\{1,\cos nx\,,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Преобразуем выражение для $f(x)$:

$f(x)=2\sin x\sin 4x=\cos 3x-\cos 5x$.

Легко видеть, что $f(x)$ – четная функция, следовательно она раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 3x - \cos 5x)dx =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 3x\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 5x\, dx = 0,$

так как функции $1, \cos 3x, \cos 5x$ ортогональны на $(-\pi;\pi)$.

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 3x - \cos 5x)\cos nx\, dx =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \cos nx\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \cos nx\, dx,$

причем, первый интеграл будет равен нулю при всех $n \neq 3$, а второй – будет равен нулю при всех $n \neq 5$ (опять же в силу ортогональности системы функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ на $(-\pi;\pi)$). Поэтому $a_n = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 3$ и $n \neq 5$.

Найдем a_3 и a_5. Заметим сразу, что интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \cos 5x\, dx$ равен нулю, так как функции $\cos 3x$ и $\cos 5x$ ортогональны на $(-\pi;\pi)$.

$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 6x)dx =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 6x\, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi + 0 = 1,$

второй интеграл равен нулю, так как функции 1 и $\cos 6x$ ортогональны на $(-\pi;\pi)$.

$a_5 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \cos 5x\, dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 10x)dx =$

$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 10x\, dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi + 0 = -1,$

второй интеграл равен нулю, так как функции 1 и $\cos 10x$ ортогональны на $(-\pi;\pi)$.

Следовательно, $f(x) = 2\sin x \sin 4x = \cos 3x - \cos 5x =$

$= a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x = 1 \cdot \cos 3x - 1 \cdot \cos 5x = \cos 3x - \cos 5x.$

Определение. Тригонометрическим многочленом называется выражение вида

$$P_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Из предыдущей задачи можно сделать вывод, что для тригонометрического многочлена тригонометрическим рядом Фурье является сам тригонометрический многочлен! Так же было: для многочлена рядом Маклорена является сам многочлен.

Ответ: $f(x) = \cos 3x - \cos 5x$.

Задача 6. Разложить функцию $f(x) = |\sin x|$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Легко видеть, что $f(x)$ – четная функция, следовательно она раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot 2 =$

$= \boxed{\frac{4}{\pi} = a_0}$.

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|\sin x|\cos nx\,dx =$

$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\sin(1+n)x + \sin(1-n)x)dx =$

$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x\,\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\,\Big|_0^{\pi} =$

$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\,\Big|_0^{\pi} \boxed{=}$

и хорошо видно, что дальнейшие вычисления мы можем проводить только при $n \neq 1$, а значение a_1 придется считать отдельно,

$\boxed{=} -\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+n}((-1)^{n+1} - 1) + \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}((-1)^{n-1} - 1) =$

$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+n}((-1)^n + 1) - \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}((-1)^n + 1) = \frac{1}{\pi}((-1)^n + 1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) =$

$= \frac{1}{\pi}((-1)^n + 1)\frac{n-1-n-1}{n^2-1} = -\frac{2}{\pi}((-1)^n + 1) =$

$= \boxed{\begin{cases} 0, n = 2k-1, \quad k = 2,3\ldots \\ \frac{-4}{\pi(4k^2-1)},\ n = 2k,\ k = 1,2,3\ldots \end{cases}}$.

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\sin 2x}_{T_0=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{2}=\pi}\,dx = \boxed{0 = a_1}.$$

Здесь мы воспользовались еще одним фактом, который полезно запомнить.

Замечание. Минимальный период T_0 функций $\cos px$ и $\sin px$ равен $T_0 = \frac{2\pi}{p}$**.** Если длина промежутка [a;b] равна периоду функции $\cos px$ и $\sin px$, то есть $b - a = n \cdot \frac{2\pi}{p}, n \in \mathbb{N}$, то интегралы $\int_a^b \sin px\,dx$ и $\int_a^b \cos px\,dx$ равны нулю.

Проверьте это самостоятельно и используйте в дальнейшем.

Следовательно, получаем, что

$$f(x) = |\sin x| \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

Ответ: $f(x) = |\sin x| \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx.$

Задача 7. Разложить функцию $f(x) = x\sin x$ на интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Легко видеть, что $f(x)$ – четная функция, следовательно она раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг, то есть $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xd\cos x =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot x\cos x\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,dx = -\frac{2}{\pi}\cdot\pi\cos\pi + \frac{2}{\pi}\sin x\Big|_0^{\pi} = \boxed{2 = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\sin(1+n)x + \sin(1-n)x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(1+n)x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(1-n)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{-1}{n+1}\int_0^{\pi} xd\cos(1+n)x + \frac{1}{\pi}\frac{-1}{1-n}\int_0^{\pi} xd\cos(1-n)x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} xd\cos(n+1)x + \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\int_0^{\pi} xd\cos(n-1)x \boxed{=}$$

и мы видим, что дальнейшие вычисления можно проводить только при $n \neq 1$, а значение a_1 придется считать отдельно,

$$\boxed{=} -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}x\cos(n+1)x\,\Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\int_0^\pi \cos(n+1)x\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}x\cos(n-1)x\,\Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\int_0^\pi \cos(n-1)x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\pi\cos(n+1)\pi + \frac{1}{\pi}\frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x\,\Big|_0^\pi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\pi\cos(n-1)\pi + \frac{1}{\pi}\frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x\,\Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1} + 0 + \frac{1}{n-1}(-1)^{n-1} + 0 = \frac{1}{n+1}(-1)^n - \frac{1}{n-1}(-1)^n =$$

$$= (-1)^n\frac{n-1-n-1}{n^2-1} = \boxed{\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} = a_n},\ \ n \neq 1.$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi xd\cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}x\cos 2x\,\Big|_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \underbrace{\cos 2x}_{T_0 = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot\cos 2\pi + 0 = \boxed{-\frac{1}{2} = a_1}.$$

Ответ: $f(x) = x\sin x \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx.$

Замечание. Поскольку значение коэффициента a_1 не описывается общей формулой, то слагаемое $a_1\cos x$ записывается отдельно.

Задача 8. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \leq x < 0 \\ x,\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ на интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ и найти сумму этого ряда в точке $x_0 = -\pi$.

Решение.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi xdx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\,\Big|_0^\pi\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2} = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^\pi xd\sin nx = \frac{1}{\pi n}\left(x\sin nx\,\Big|_0^\pi\right) - \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\,dx = 0 + \frac{1}{\pi n^2}\left(\cos nx\,\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = a_n}.$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot \sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$

$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} xd\cos nx = -\frac{1}{\pi n}\left(x\cos nx\,\Big|_0^{\pi}\right) + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx =$

$= -\frac{1}{\pi n}(\pi\cos\pi n - 0) + \frac{1}{\pi n^2}\left(\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{n}(-1)^n + 0 =$

$\boxed{= \frac{1}{n}(-1)^{n+1} = b_n}$.

Тогда

$f(x) \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$

Найдем сумму этого ряда в точке $x_0 = -\pi$.

$S(-\pi) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos n\pi - \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin n\pi =$

$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)(-1)^n - \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\cdot 0 =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что $f(-\pi) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = S(-\pi)$, так как 2π-периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю действительную ось не является непрерывным.

Ответ: $f(x) \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$;

$S(-\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Задача 9. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -2x, -\pi \le x < 0 \\ 3x,\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$ на интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ и найти значение суммы ряда при $x = \pi$.

Решение.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3xdx =$

$= \frac{-2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{3}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{-1}{\pi}(0 - \pi^2) + \frac{3}{2\pi}(\pi^2 - 0) = \boxed{\frac{5\pi}{2} = a_0}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3x\cos nx\,dx =$

$= \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0} xd\sin nx + \frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} xd\sin nx =$

$$= \frac{-2}{\pi n}\left(x \sin nx \,\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx +$$

$$+ \frac{3}{\pi n} x \sin nx \,\Big|_{0}^{\pi} - \frac{3}{\pi n}\int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx =$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi n^2}\cos nx \,\Big|_{-\pi}^{0} + 0 + \frac{3}{\pi n^2}\cos nx \,\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}(1 - (-1)^n) + \frac{3}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \boxed{\frac{5}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = a_n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0} x d\cos nx - \frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} x d\cos nx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(x \cos nx \,\Big|_{-\pi}^{0}\right) - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\, dx -$$

$$- \frac{3}{\pi n} x \cos nx \,\Big|_{0}^{\pi} + \frac{3}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(0 - (-\pi)\cos \pi n) - \frac{2}{\pi n}\frac{1}{n}\sin nx \,\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{3}{\pi n}(\pi \cos \pi n - 0) + \frac{3}{\pi n}\frac{1}{n}\sin nx \,\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\,\pi(-1)^n - 0 - \frac{3}{\pi n}\,\pi(-1)^n + 0 = \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{n} = b_n}.$$

Следовательно, получаем, что

$$f(x) \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Найдем $S(\pi)$:

$$S(\pi) = \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos \pi n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin \pi n =$$

$$= \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2}(-1)^n + 0 = \frac{5\pi}{4} + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} =$$

$$= \frac{5\pi}{4} + \frac{5}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{12} = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{12} = \frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2},$$

так как в задачах, решенных ранее, получили, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Заметим, что $f(\pi) = 3\pi \neq \frac{5\pi}{2} = S(\pi)$, потому что 2π-периодическое продолжение функции $f(x)$ не является непрерывным в точке $x = \pi$ (нарисуйте “картинку» для 2π-периодического продолжения функции $f(x)$ и $S(x)$).

Ответ: $f(x) \underbrace{=}_{(-\pi;\pi)} \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx;\ S(\pi) = \frac{5\pi}{2}$.

Обратите внимание, что если мы раскладываем функцию в тригонометрический ряд Фурье по системе $\{1, \cos nx\,, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, то она должна быть задана на промежутке длины 2π. Что делать, если функция задана на промежутке меньшей длины, например, на промежутке $(0;\pi)$? Конечно, надо ее продолжить на промежуток $(-\pi;0)$. Рассмотрим четные и нечетные продолжения.

Задача 10. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на интервале $(0;\pi)$ в ряд по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Поскольку мы хотим получить разложение некоторой функции в ряд по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, то функция должна быть нечетной.

Итак, пусть $\varphi(x)$ – нечетное продолжение $f(x) = x^2$, заданной на интервале $(0;\pi)$, на интервал $(-\pi;0)$. Так как $\varphi(x)$ – нечетная функция, то все коэффициенты $a_n, n = 0,1,2,\dots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Найдем коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)\sin nx}_{\text{четная}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx \underbrace{=}_{\substack{\varphi(x)=f(x)\\ \text{на } (0;\pi)}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2 d\cos nx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(x^2 \cos nx\,\Big|_0^{\pi}\right) + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx^2 =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cdot \pi^2 \cdot \cos \pi n + \frac{2\cdot 2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\cdot(-1)^n + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} xd\sin nx =$$

$$= \frac{2\pi}{n}\cdot(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2} x\sin nx\,\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + 0 + \frac{4}{\pi n^3}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} = \boxed{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1) = b_n}.$$

Мы можем получить разложение функции $\varphi(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$. Но на интервале $(0;\pi)$ функция $\varphi(x)$ совпадает с функцией $f(x) = x^2$. Следовательно, совпадают и их разложения в тригонометрический ряд, то есть

$$f(x) = x^2 \underbrace{=}_{(0;\pi)} \varphi(x) \underbrace{=}_{(0;\pi)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nx.$$

Ответ: $f(x) = x^2 \underbrace{=}_{(0;\pi)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nx.$

Замечание. Постройте в трех системах координат графики функций:

1. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = \mathbb{R}$.
2. Нечетное продолжение $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = (0;\pi)$ на интервал $(-\pi;0)$ и его 2π-периодическое продолжение.
3. $y = S(x)$ с областью определения $D_S = \mathbb{R}$.

Осознайте, что получаются разные кривые. Сравните полученный результат с теми, что были получены в задачах 2 и 3. Заметьте, что получаются разные кривые и различные разложения! Но все эти кривые совпадают на интервале $(0;\pi)$! Значит, на интервале $(0;\pi)$ можно получить разные разложения 2π-периодической функции по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Здесь важным является то, что функция изначально задается не на всем промежутке длины 2π.

Задача 11. Разложить функцию $f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ на интервале $(0;\pi)$ в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Поскольку мы хотим получить разложение некоторой функции в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$, то функция должна быть четной.

Итак, пусть $\varphi(x)$ – четное продолжение $f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, заданной на интервале $(0;\pi)$, на интервал $(-\pi;0)$. Так как $\varphi(x)$ – четная функция, то все коэффициенты $b_n, n = 1,2,\ldots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Найдем коэффициенты a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)dx \underbrace{=}_{\substack{\varphi(x)=f(x)\\ \text{на } (0;\pi)}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \boxed{0 = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)\cos nx}_{\text{четная}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\cos nx\, dx \underbrace{=}_{\substack{\varphi(x)=f(x)\\ \text{на } (0;\pi)}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\, dx = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) d\sin nx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin nx\,\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}\sin nx\, d\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0 + \frac{4}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}\sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8}{\pi^2(2k-1)^2}, & n = 2k-1, k = 1,2,3\ldots \end{cases}$$

Мы можем получить разложение функции $\varphi(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$. Но на интервале $(0;\pi)$ функция $\varphi(x)$ совпадает с функцией $f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Следовательно, совпадают и их разложения в тригонометрический ряд, то есть

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \underbrace{=}_{(0;\pi)} \varphi(x) \underbrace{=}_{(0;\pi)} \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}\right)\cos(2k-1)x.$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \underbrace{=}_{(0;\pi)} \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}\right)\cos(2k-1)x.$

Задача 12. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$ на интервале $(0;\pi)$ в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Поскольку мы хотим получить разложение некоторой функции в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$, то функция должна быть четной.

Итак, пусть $\varphi(x)$ – четное продолжение $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$, заданной на интервале $(0;\pi)$, на интервал $(-\pi;0)$. Так как $\varphi(x)$ – четная функция, то все коэффициенты $b_n, n = 1,2,\ldots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Найдем коэффициенты a_n.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\varphi(x)}_{\text{четная}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)dx\underbrace{=}_{\substack{\varphi(x)=f(x)\\ \text{на }(0;\pi)}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{8}=\boxed{\frac{\pi}{4}=a_0}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\varphi(x)\cos nx}_{\text{четная}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx\underbrace{=}_{\substack{\varphi(x)=f(x)\\ \text{на }(0;\pi)}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)d\sin nx=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left(1-\cos\frac{\pi n}{2}\right)=\boxed{\frac{4\sin^2\frac{\pi n}{4}}{\pi n^2}=a_n}.$$

Мы можем получить разложение функции $\varphi(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$. Но на интервале $(0;\pi)$ функция $\varphi(x)$ совпадает с функцией

$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x, 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, \quad \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$. Следовательно, совпадают и их разложения в тригонометрический ряд, то есть

$$f(x)\underbrace{=}_{(0;\pi)}\varphi(x)\underbrace{=}_{(0;\pi)}\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi n}{4}}{n^2}\cos nx.$$

Ответ: $f(x)\underbrace{=}_{(0;\pi)}\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi n}{4}}{n^2}\cos nx.$

Задача 13. Разложить функцию $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ на интервале $(0;2\pi)$ в ряд по системе $\{1,\cos nx,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение 1.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi x-\frac{x^2}{2}}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=\boxed{0=a_0}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}d\sin nx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,d\left(\frac{\pi-x}{2}\right)=0+\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=\boxed{0=a_n}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,d\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\cos nx\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,d\left(\frac{\pi-x}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(\frac{\pi-2\pi}{2} - \frac{\pi-0}{2}\right) + \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = \frac{1}{n} + 0 = \boxed{\frac{1}{n} = b_n}\,.$$

Следовательно получаем, что

$$f(x) = \frac{\pi-x}{2} \underbrace{=}_{(0;2\pi)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

Решение 2.

Заметим, что 2π-периодическое продолжение функции $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ является нечетной функцией. Поэтому разложение этой функции в тригонометрический ряд будет совпадать с разложение в тригонометрический ряд функции $\varphi(x)$, которая будет являться ограничением 2π-периодического продолжения функции $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ на интервал $(-\pi;\pi)$. Но так как полученное ограничение будет нечетной функцией, то все коэффициенты $a_n, n = 0,1,2,\ldots$ будут равны нулю. Достаточно найти коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\varphi(x)\sin nx}_{\text{четная}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,d\cos nx = -\frac{2}{\pi n}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\cos nx\,\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,d\left(\frac{\pi-x}{2}\right) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{2}{\pi n}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{2}{2\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n} + 0 = \boxed{\frac{1}{n} = b_n}\,.$$

И, конечно, вновь получаем, что

$$f(x) = \frac{\pi-x}{2} \underbrace{=}_{(0;2\pi)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

Ответ: $f(x) = \frac{\pi-x}{2} \underbrace{=}_{(0;2\pi)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$

Задача 14. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases}\sin x\,, 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \ \ \frac{\pi}{2} \le x < \pi\end{cases}$ на интервале $(0;\pi)$ в ряд по системе $\{\,sin\,nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Пусть $\varphi(x)$ – нечетное продолжение $f(x) = \begin{cases} \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$, заданной на интервале $(0;\pi)$, на интервал $(-\pi;0)$. Так как $\varphi(x)$ – нечетная функция, то все коэффициенты $a_n, n = 0,1,2,\ldots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Найдем коэффициенты b.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)\sin nx}_{\text{четная}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin nx\, dx \underbrace{=}_{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1)x\, dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n+1)x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{\equiv}$$

дальнейшие вычисления мы можем проводить только при $n \neq 1$

$$\boxed{\equiv} \frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2} = -\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi n}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{2n}{n^2-1}\cos\frac{\pi n}{2} =$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k-1 \\ -\frac{1}{\pi}\frac{4k}{4k^2-1}(-1)^k, n = 2k, k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)\sin x}_{\text{четная}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin x\, dx \underbrace{=}_{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi}\sin 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$f(x) \underbrace{=}_{(0;\pi)} \frac{1}{2}\sin x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{4k^2-1}\sin 2kx.$$

Ответ: $f(x) \underbrace{=}_{(0;\pi)} \frac{1}{2}\sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\sin 2kx.$

В дальнейшем при изучении курса «Уравнения математической физики» чаще будет встречаться система $\left\{1, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$, которая будет ортогональна на любом отрезке длины $2l$. И тогда, если $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a;b]$ длины $2l$, то

$$f(x) \underbrace{=}_{x\in[a;b]} S(x),$$

где $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$,

$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx$,

$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$,

$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$,

причем, если x – точка непрерывности $2l$-периодического продолжения функции $f(x)$, то $S(x) = f(x)$, если x – точка разрыва $2l$-периодического продолжения функции $f(x)$ (1-го рода!), то

$S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, где $f(x+0) = \lim\limits_{\alpha\to 0_+} f(x+\alpha)$, $f(x-0) = \lim\limits_{\alpha\to 0_+} f(x-\alpha)$.

Задача 15. Разложить функцию $f(x) = |x|$ на интервале $(-l;l)$ в ряд по системе $\left\{1, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Функция $f(x) = |x|$ на интервале $(-l;l)$ является четной, поэтому будут равны нулю все коэффициенты b_n, $n = 1,2,\dots$

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l xdx = \frac{2}{l}\frac{x^2}{2}\Big|_0^l = \boxed{l = a_0}$.

$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{\pi n x}{l}dx =$

$= \frac{2}{l}\frac{l}{\pi n}\int_0^l xd\sin\frac{\pi n x}{l} = \frac{2}{l}\frac{l}{\pi n}x\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l - \frac{2}{l}\frac{l}{\pi n}\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}dx =$

$$= 0 - \frac{2}{\pi n}\frac{-l}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l = \frac{2l}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{2l}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k \\ \frac{-4l}{\pi^2(2k-1)^2}, n = 2k-1, k = 1,2,\dots \end{cases}$$

Поэтому получаем разложение

$$f(x) = |x| \underbrace{=}_{(-l;l)} \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

Ответ: $f(x) = |x| \underbrace{=}_{(-l;l)} \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$

Задача 16. Разложить функцию $f(x) = e^x$ на интервале $(-l; l)$ в ряд по системе $\left\{1, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x dx = \frac{1}{l}e^x\Big|_{-l}^{l} = \boxed{\frac{e^l - e^{-l}}{l} = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \boxed{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x \cos\frac{\pi n x}{l}dx} =$$

$$= \frac{1}{l}\frac{l}{\pi n}\int_{-l}^{l} e^x d\sin\frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{l}\frac{l}{\pi n}e^x\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi n x}{l}de^x =$$

$$= 0 - \frac{1}{\pi n}\int_{-l}^{l} e^x \sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{\pi n}\frac{l}{\pi n}\int_{-l}^{l} e^x d\cos\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= \frac{l}{\pi^2 n^2}e^x\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{l}{\pi^2 n^2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi n x}{l}de^x =$$

$$= \frac{l}{\pi^2 n^2}(e^l\cos\pi n - e^{-l}\cos\pi n) - \frac{l}{\pi^2 n^2}\int_{-l}^{l} e^x\cos\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \boxed{\frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x\cos\frac{\pi n x}{l}dx}.$$

Мы получили уравнение относительно нужного нам интеграла, откуда получаем

$$a_n = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2}a_n$$

$$a_n\frac{l^2 + \pi^2 n^2}{\pi^2 n^2} = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2}$$

$$\boxed{a_n = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{l^2 + \pi^2 n^2}}.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \boxed{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x \sin\frac{\pi n x}{l}dx} =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi n x}{l}de^x = \frac{1}{l}e^x\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x d\sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= 0 - \frac{1}{l}\frac{\pi n}{l}\int_{-l}^{l} e^x\cos\frac{\pi n x}{l}dx = -\frac{\pi n}{l^2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi n x}{l}de^x =$$

$$= -\frac{\pi n}{l^2}e^x\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{\pi n}{l^2}\int_{-l}^{l} e^x d\cos\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= -\frac{\pi n}{l^2}\left(e^l\cos\pi n - e^{-l}\cos\pi n\right) - \frac{\pi^2 n^2}{l^3}\int_{-l}^{l} e^x\sin\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \boxed{-\frac{\pi n(-1)^n\left(e^l - e^{-l}\right)}{l^2} - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x\sin\frac{\pi n x}{l}dx}.$$

Мы получили уравнение относительно нужного нам интеграла, откуда получаем

$$b_n = -\frac{\pi n(-1)^n\left(e^l - e^{-l}\right)}{l^2} - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}b_n$$

$$b_n(l^2 + \pi^2 n^2) = -\pi n(-1)^n(e^l - e^{-l})$$

$$\boxed{b_n = -\frac{\pi n(-1)^n\left(e^l - e^{-l}\right)}{l^2 + \pi^2 n^2}}.$$

Следовательно, разложение в тригонометрический ряд будет иметь вид

$$f(x) = e^x \underbrace{=}_{(-l;l)} \frac{e^l - e^{-l}}{2l} + (e^l - e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l(-1)^n}{l^2+\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{l} - \frac{\pi n(-1)^n}{l^2+\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Ответ: $f(x) = e^x \underbrace{=}_{(-l;l)} \frac{e^l - e^{-l}}{2l} + (e^l - e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l(-1)^n}{l^2+\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{l} - \frac{\pi n(-1)^n}{l^2+\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{l}.$